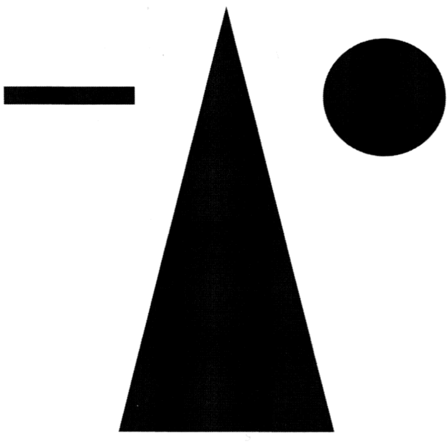
数学の基礎についての哲学論考

確かさを求めて

M.ジャキント著／田中一之監訳

THE SEARCH FOR CERTAINTY



培風館

父 Phil と母 Judith の想い出に本書を捧ぐ

The Search for Certainty

A Philosophical Account of Foundations of Mathematics

by

Marcus Giaquinto

Search for Certainty was *originally published in English in 2002. This translation is published by arrangement with Oxford University Press.*

本書の英語版原著 “The Search for Certainty” は 2002 年に Oxford University Press より出版されたものである。本翻訳は，Oxford University Press との契約に基づいて出版された。

序

本書は，史上稀にみる華麗な知的探検について哲学的考証を行うものである。この知的探検は，クラスパラドクスの発見のあとに，数学の正しさを確認しようと繰り広げられた。その試みが成功したか否かについては意見が分かれるかもしれないが，それがもたらした成果の豊富さは否定しがたい。この探検は，数学の哲学を刺激し，活気に溢れ，前向きで，数学的内容にも富んだ論争の新時代を興起した。そして，いくつかの驚くべき深遠な事実の発見によって数理論理学 (ロジック) が誕生し，それはいまやいくつもの小分野に分かれる巨大な研究領域に発展している。ところが，その学問的重要性と魅力に反して，ロジックの哲学的なあらましを解説した書物は，私の知る限りこれまで存在しなかった。私自身ロジックの学生として初めてこの分野に取り組んだときにそのような本を切望したものであり，その文献の空白を埋めるが本書の役目なのである。

歴史的な筋書きもある程度伝えたいと思うが，本書は歴史書ではない。私の目的はあくまで，主要な哲学的アイデアと論議を提示して，それらに取り組むことである。したがって，本書はロジックの教科書でもない。だが，いくつかの定理は重要な哲学論争の焦点であり，それらについて解説し，また証明の概略を与えることは不可欠である。その場合でも，理解の助けにならない技術的議論はなるべく抑え，目的がそこにない限り細部は注釈に回すなどして，読みやすさのために最善の工夫を施した。そして，適度な厚みの中で，なるべく大きな絵を描くように試みた。それは，扱うテーマの広さと深さの間で絶えない苦闘を意味することになった。ここで扱ったトピックについて，これ以上の考察はいらないと思うことはほとんどなく，しばしば身を切るような思いであった。いくつかの明確な結論を導き出せても，それでおしまいといえるような問題などないのである。また，これも簡潔さを保つ理由で，ブラウワーの直観主義プログラムなどいくつかの “基礎論的” 研究プログラムに対しては，動機の考

えを概説するくらいで吟味しなかった。そのようなプログラムは，現存する数学を救うためでなく，それを新たなものに置き換えることを目的としているからである。また，これ以上語るには，いくつか章を増やし，論点を広げる覚悟がなければ無理であった。いずれせよ，直観主義などのプログラムをここで扱わなかったのは，それらの重要性に対して批判的な意味をもつものではないことをお断りしておく。

ここにまず感謝の意を表したいのは Michael Potter と Michael Resnik にである。両氏は最終の一歩手前の原稿を読んで膨大な量のコメントをくれ，それがこの本の改善におおいに役だった。それから，Michael Detlefsen, Jeremy Gray, Moshé Machover, Jesse Norman，加えて 2 人の匿名査読者にも，本書の初期原稿のさまざまな箇所についてコメントをいただいたことを感謝する。とくに，Mic Detlefsen はヒルベルトのプログラムの存続について私と考えを異にしていたにも関わらず，私のものの見方を修正し，議論をシャープにしていただいた。この点については，David Auerbach にも感謝しなければならない。また，Paolo Mancosu には励ましをいただき，またちょうどよいタイミングでベルナイスとヒルベルトの論文を訳出いただいたことにも感謝したい。この分野における私のものの見方は，次にあげる先生や同僚から多大な影響を受けている：John Bell, Michael Dummett, Christopher Ferneau, Robin Gandy, Bill Hart, Wilfrid Hodges, Daniel Isaacson, Moshé Machover, Dana Scott, Crispin Wright．もちろんここにあげられなかった人もたくさんいるが，私はすべての方々に感謝している。また，この分野の研究者なら誰もがいうことであるが，私も Solomon Feferman 氏に彼の基礎論研究とゲーデル全集編纂に対して感謝の意を表したい。これほど助けになった資料は他にない。私の学位論文の指導教官は Daniel Isaacson であったが，そのとき以来哲学と基礎論の問題に対する彼のアプローチが私を導いてきたのであり，先生には格別の感謝を捧げなければならない。この本が，先生の容認基準をはるかに下回ることがないよう切に願うものである。それから，Peter Momtchiloff 氏には，骨の折れる仕事をお手伝いいただき有り難く思う。そして，何より妻 Frances の愛情と支えには感謝している。

ロンドンにて　M. G.

目　　次

人々が宗教的信仰を欲するような仕方で (私は) 確実性を求めたが，これはほかのところより数学中にありそうに思った。しかし，先生が (私に) 承認を期待した多くの数学的証明は間違いだらけ (で，確実性は新しい種類の数学の中にある) ということがわかった。［( ) 内は監訳者による］

バートランド・ラッセル『自伝的回想』(中村秀吉訳，みすず書房 (2002))

ここで声を大にして訴えたいのは，われわれが種々の逆理に直面している今日のこの事態が長く続いては耐えられない，ということである。思っても見よ：正確さと真実との模範というべきこの数学において，誰もが学び，教え，そして使っている概念構成や推論が不合理を導くのである。数学的思考でさえやくに立たないとすれば，正確さと真実とをどこに求めればよいのであろう。

ダヴィット・ヒルベルト『無限について』(寺阪英孝・大西正男訳「幾何学の基礎」，共立出版 (1970) 所収)

第 I 部

背　景

1 解析学の明確化

20 世紀初頭，数学者は，自分たちの研究の土台にかつて抱いたことのない懸念を示していた。それは，単なる不安の表明にとどまらず，確固たる基盤をみつけようという挑戦でもあった。この確実性の探求とその引き金となった危機が，本書の中心となる話題である。本書の第 I 部では，この話題の数学的背景を解説して，それにより，数学の明確さと厳密さに対する 19 世紀の探求から，どのようにして数学の基礎づけへの試みが生まれたのかを理解することを目的とする。

20 世紀より前の数学が困難なしに進歩してきたというわけではない。数学における進歩，特に，新しい種類の対象と新しい方法の導入は，しばしば難問とパラドクスを産み出した。これらは容易に解決されることもあったが，つねにそうだったわけではない。解決策がみつけられるまでは，新しいアイデアは疑いをもってみられていた。しかし，やがてアイデアは明確になり，疑いは晴れることになる。その好例は，負の整数の導入である。17 世紀，新しい数の提唱者は，負の整数 $-n$ と正の整数 n の比を次のように扱った。

$$\frac{-n}{n} = -1 = \frac{n}{-n}.$$

このように計算するのは問題がないようにみえる。しかし，$-n$ は n より小さいので，上式の両辺が等しいとすれば，小さい数と大きい数との比が，大きい数と小さい数との比に等しいということになり，不合理である。これをアルノーのパラドクスという [1]。この問題は，$-n$ (ただし n は正の整数) を単なる量ではなく，反対方向の量と理解することにより解決される。例えば，前後への足の運び，またはお金の貸借のような整数の応用を考えてみれば，このような理解が自然であると思える。項 $-n/n$ と項 $n/-n$ が量の比を表していると考えることはもはや正しくない。比の記法を正の整数から負の整数まで拡張する場

合，項 b/c は，b を得るために c に掛けなければならない数を表していると理解できる。数 k に負の数 $-j$ を掛けることは，$-j$ の絶対値 j を掛け，その積 $j \cdot k$ の方向を逆転させることと理解できる。

無限に関する問題

新しい考え方を古い考え方と統合するという課題はたいてい容易ではなかった。新しい考え方ははじめ困難を伴い，しだいに明確化され，最終的に受け入れられていく。しかし，より高度な革新においては，より困難な問題を生じ，明確化に長い時間がかかった。なんといっても大きな困難の源は微積分学であった。17 世紀における微積分学の発見以来，その認識論的妥当性について疑いがもたれ，論争がくり返された[2]。微積分学から生じた問題の一例は，瞬間速度という考え方についてである。時間による変化に関する多くの自然な事例において，微積分学は，変化が起こっている各点における変化の“割合”の計算方法を与える。物体がある場所からの距離を変化させるとき，その変化の割合は，物体の速度である。微積分学は，与えられた瞬間における移動物体の速度の計算を可能にする。しかし，この瞬間速度という考え方は不可解である。速度は移動距離を移動の継続時間で割った値である。瞬間は時刻の 1 点であり，時間の長さは 0 である。しかし，正の距離を移動するためには，正の時間長が必要である。したがって，瞬間速度は，距離 0 を時間 0 で割った値と考えられるが，これは値をもたない。それにもかかわらず，瞬間速度の計算とその結果を他の計算に取り入れる手法は非常に有用であることが判明した。したがって，この考え方を説明する他の方法があるに違いない。それは何であろうか。時刻に対する物体の移動距離をグラフに表してみよう (図 1.1)。時刻 t から時刻 $t+h$ の間の物体の平均の速度を計算することは容易である。それは，移動距離を移動の継続時間で割った値である。時刻 x までに移動した距離を $f(x)$ と表すと，これは，$[f(t+h)-f(t)]/h$ となる。

したがって，ある時間区間上の平均速度という考え方には問題がない。時刻 t における物体の速度，t における瞬間速度はどうであろうか。t と $t+h$ の間の平均速度は直線 PQ の傾きで表される。したがって，t における瞬間速度は，点 X が曲線に沿って Q から P に移動するときに直線 PX が最終的に表す直線

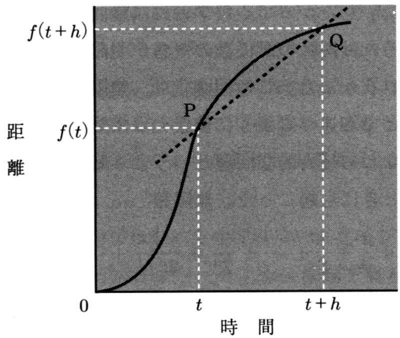


図 1.1

の傾きと考えることができる。しかし，これは厳密性に欠ける議論である。X が P に着くまでは，直線 PX の傾きは瞬間速度ではなく，ある区間上の平均速度を表している。X が P に着いたとき，それは P と一致し，もはや直線 PX は存在しない。この考え方は記号で表すことができる。t における瞬間速度は，h が 0 になるときに $[f(t+h)-f(t)]/h$ が最終的に表す値である。h が 0 でない限り，これは時刻 t における物体の瞬間速度ではなく，t から $t+h$ という区間上の平均速度である。そして，h が 0 のときには値をもたない。これでは出発点に戻ってしまっている。

必要なことは，点 P を通る直線を，“P における曲線の接線”として選び出す方法である。このとき，t における物体の瞬間速度をその直線の傾きとして定義できる。しかし，どのようにして適切な直線を選び出すのであろうか。微積分学が生まれた当初から，無限小量という言葉を用いて説明が与えられてきた。微積分学の創始者の一人であるライプニッツは，P を通る直線で，P の両側の曲線上の無限小に近い 2 つの点を通る直線を P における曲線の接線と考えた。そして，このとき，t における瞬間速度はその直線の傾きである。ニュートンは，消えゆく (エバネッセント：evanescent) 時間に対する消えゆく距離の比を瞬間速度と考えた。この議論は示唆に富んではいるが問題を解決していない。無限小量とは何であろうか。消えゆく量とは何であろうか。1687 年の手紙で，ライプニッツは，それはすべての特定可能な量よりも小さく，0 でない量であるといった[3]。これもまた曖昧であり，彼は明確に説明するための努力を続

けたが，成功しなかった。したがって，数学者には瞬間速度に意味をもたせるという仕事が残され，それは関数の微係数の概念が明確に定式化されるまでの約150年の間，達成されなかった。この明確化は，無限小の概念を排除することには成功したが，あとでも述べるように無限大は依然として残された。

同じような問題，すなわち技術的な問題というより概念的な問題が，無限列とその操作を導入するときにも起こった。無限和

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots$$

には，意味があるように思われる。この足し算をしていくと，1に近づくが1を越えない。しかし，1より小さいすべての数を越え，1に近づく。したがって，この無限和の値は1であるといってよいだろう。この操作を視覚化するならば，つぎのように線分を連続的につなぎ合わせる操作とみることができる。最初に長さ1/2の線分を引く。あとは，(無限和において項を加えることに対応して)直前に引いた長さの半分の線分で，いままで引いた線分を延長すればよい。それでは，つぎに，18世紀に議論された例をみてみよう。

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

($+$ と $-$ の符号は交互に続く。マイナスの符号が出現するが，$x-y$ は x と $-y$ の和のことなので，これは無限和である。)　この無限和を

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

と書くことにより，和が0になることは明らかであると思われる。しかし，$-1+1=-(1-1)$ であることから，この無限和は，1のあとに $-(1-1)$ が無限に繰り返された形で表現できる。

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots$$

この場合は，和が1になることは明らかであると思われる。最後に，この無限和を S とすると，和のマイナスは，加える各項の符号を反転させて得られるので，

$$-S=-1+1-1+1-1+1-\cdots$$

となる。この両辺に1を加えると，

$$1-S=1-1+1-1+1-1+1-\cdots$$

となるが，右辺は，もとの無限和であるから S である。すなわち，$1-S=S$ となり，$S=1/2$ となる。したがって，S の値が 0，1，1/2 の 3 つ得られた。どれが正しいのであろうか。今日の我々であれば，この無限和は値をもたないと答えるであろう。なぜなら，現在では級数とよばれるこの無限和は収束しないからである。ただし，後述のような収束判定条件は 19 世紀まで定まっていなかった[4]。

この例は見た目ほどつまらないものではない。ライプニッツは，式 $1/(1+x)$ をベキ級数 $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$ として展開する方法により，$S=1/2$ を得た。x に 1 を代入するとその結果が得られる[5]。ライプニッツは，円周率の数値表現を得るために，**ベキ級数**[6] として式を展開する方法を用いた[7]。数十年後，オイラーは同じ方法を使い，不合理と思われる結果を得た。例えば彼は，$1/(1-x)$ を展開して $1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots$ となることを発見し，x に 2 を代入することにより，$-1=1+2+4+8+\cdots$ という結果を得た。オイラーは，$0<x<1$ のときに限りこの展開における項が 0 に近づくことに気づいていた。しかし，発散する級数は，収束する級数についての結果を得るために有用であるという実用的な根拠に基づいて，発散する級数の使用を彼は擁護した。

オイラーの著述は 18 世紀半ばのものであり，19 世紀初頭には，実用主義に傾いていた状況が変化する。また 18 世紀には，弦振動に対する波動方程式の厳密解について，大きな論争がもち上がった。ダランベール，オイラー，ダニエル・ベルヌーイ，ラグランジュが主な論客であった。ダニエル・ベルヌーイが，弦振動のすべての運動は，三角級数，すなわち三角関数を含む項からなる無限和として表現できるという主張をしたのは，その論争のただ中であった[8]。19 世紀に入ってフーリエが，三角級数として表現できる関数のクラスはとても広く，それらが物理の問題を解くために非常に有用であることを公表して，議論が再燃した。いったい，この関数のクラスはどのくらい広いのであろうか。解析的な表現をもたない関数や非周期的な関数や不連続な関数は除外されるのであろうか。これらの問題は，厳密さへの関心を高めるのに役だった。なぜなら，満足できる回答を与えるためには，問題を記述するための語句の一般的で正確な定義が必要であり，議論の中心である無限和の概念に対してそのような定義が必要となったからである。

さらに，無限和が頻繁に利用されるようになると，収束級数に対して証明された結果が発散級数に対しても成り立つと考える根拠はないことが明らかになった。19 世紀前半を代表する解析学者の一人であるアーベルは，ある手紙で,「解析学において見過ごすことのできないひどい曖昧さ」と「特殊から一般を結論づけるずさんな方法」について不満を漏らしている。他の手紙において，彼は，次のようにも書いている。「(発散する級数) を使うことにより，好きなような結論を引き出すことができる。それゆえ，これらの級数は多くの謬見とパラドクスを産み出している ... 幾何級数を除いて，厳密にその和が決定される無限級数は数学の中に一つも存在しない。いい換えると，数学においてもっとも重要なものは，もっとも弱い基礎をもつものである。」[9]

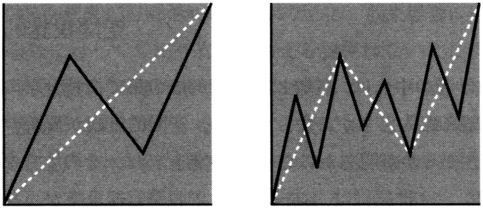
上で述べた問題は特異な例ではない。誤った議論により，不合理な結果が導かれることもある。証明されたと錯覚されていた有名な例は，連続関数が，離散的な点クラスを除き，それが定義されているすべての点において微係数をもつというものがある。これがもっともらしいと考えられていた理由は簡単にわかる。関数 f が曲線を表しているとする。曲線上の点 $\langle t, f(t)\rangle$ においてその曲線が接線となる唯一の直線をもてば，その関数は，t において微分可能であり，t において微係数をもつといわれ，その微係数は $\langle t, f(t)\rangle$ における接線の傾きである。曲線の尖った角では接線をもたないが，局所的に滑らかな部分では各点において接線をもつと仮定することは自然である。連続関数を，途切れていない曲線として視覚的に考えると，尖った角をもつところは離散的に現れると考えるのがもっともらしいので，連続関数は，どの点も局所的に滑らかであるか，局所的に滑らかな部分を繋ぎ合わせたものであるということになる。これにより， 連続関数はおそらく離散的な点クラス以外では，いたるところ微係数をもつだろうという信念が引き起こされる。この信念を支持するいくつもの議論があったが，結局誤りであることが判明する[10]。ここでも問題は，解析学の基礎となる概念の明確な定義が欠除していたことであり，この場合，関数，連続性，微係数についてであった。もし，解析学を健全な基礎の上に構築することを望むならば，他の概念もまた正確な定義が必要であった。

空間視覚的直観の崩壊

17 世紀の数学者の中には，純粋に幾何学的な言葉で微積分学の手法に意味をもたせたいと望んだ人たちがいた。しかし，空間的直観が解析学においてどれほど誤解を招きうるかが明らかになった 19 世紀には，そのような望みは消えていった。さらに，19 世紀には，ユークリッドの平行線公準が正反対の公理に矛盾なく置き換えられることが発見され，したがって，物理的な空間の幾何学がユークリッド的でない可能性が浮上し，幾何学は確実性の名声を失った[11]。しかし，もっとも重要な原因は，我々の空間的直観が信頼できないという認識が増大したことであった。

解析学における直観と現実の乖離は，連続関数が，離散的な点クラス以外ではいたるところ微係数をもつはずである，という信念に反例が発見されたことにより明確に示された。これは，いたるところ微分可能でない連続関数として知られている。最初の例はボルツァーノにより与えられた[12]。ここでは，ボルツァーノの例を単純化したものについて基本的な考え方を説明する。その関数は，関数列の極限であり，各関数は 0 から 1 までの閉区間で定義されている。関数列の最初の関数は，恒等関数 $f_1(x) = x$ であり，そのグラフは原点から $\langle 1, 1\rangle$ までの右上りの対角線である。第 2 番目の関数 f_2 は，その対角線を，原点から $\langle 1/3, 3/4\rangle$ までの線分，$\langle 1/3, 3/4\rangle$ から $\langle 2/3, 1/4\rangle$ までの線分，$\langle 2/3, 1/4\rangle$ から $\langle 1, 1\rangle$ までの線分という 3 つの線分で置き換えたものである。よって，f_2 の第一の構成要素は，水平に 3 分の 1 進んで対角線の高さの 4 分の 3 まで上がり，f_2 の第二の構成要素は，水平に 3 分の 1 進んで対角線の高さの 4 分の 1 まで下がり，第三の構成要素は，水平に 3 分の 1 進んで対角線の高さまで上がる。これは，図 1.2(a) に示されている。第 3 番目の関数 f_3 は，f_2 の各構成要素を 3 つの新しい構成要素で置き換える。f_2 の右上がりの部分は，f_1 が f_2 で置き換えられたのと同様に置き換える。中央の右下がりの部分は，つぎのような 3 つの構成要素に置き換える。それぞれは，水平の長さの 3 分の 1 を進み，最初の構成要素は垂直の高さの 4 分の 3 下がり，第二の構成要素は垂直の高さの半分上がり，最後の構成要素は終点まで下がる。これは図 1.2(b) に示されている。

一般に，f_{n+1} は f_n の各構成要素を 3 つの新しい構成要素に同様に置き換えることにより構成される。これらの関数列によっていくらでも近似できる単一



(a) (b)

図 1.2

の連続関数が，すべての点で微係数をもたないものであることが証明できる。

もし，連続関数がある点で微係数をもたないならば，その点で接線をもたないので，その曲線はその点において尖った頂上，または尖った谷になっている。直観的には，尖った頂上または尖った谷の両側には接線をもてるほど滑らかな曲線の一部があるに違いない。しかし，いたるところ微分できない連続関数はすべての点で接線をもたないので，その曲線はすべての点において，尖った頂上または尖った谷で構成されていなければならず，空間的直観を受けつけない可能性がある。

次の関連した発見は，空間的直観の不確かさをさらに裏づけた。1890 年，ペアノは，2 次元領域を完全に埋める曲線を定義することが可能であることを示した。端点をもつ曲線は長さをもつが面積をもたない形状をしているようにみえるので，これは不可能のように思われる。空間を埋める曲線の例をペアノが最初に発見して以来，ふつうの曲線の無限列の極限を考えることにより，他にも多くの例が発見された。ヒルベルトは，極限の曲線が領域を埋めるような曲線の列を生成する方法の一つについて，その基礎となる幾何学的な考え方を説明した。ヒルベルト曲線を生成する最初の 3 段階を図 1.3 に示す[13]。

もちろん，これらの発見は，該当する語句に正確な定義が与えられたときにだけ正確に証明される。しかし，これらの発見により，微積分学の厳密な説明は，空間的直観に基づいた理論の言葉では与えることができないという考えが強まった。幾何学的な説明を探す代わりに，解析学者は，明確化と再構築のための算術的な概念を開発した。そして，19 世紀の終わりまでに，実質的な明確化が達成されることになる。

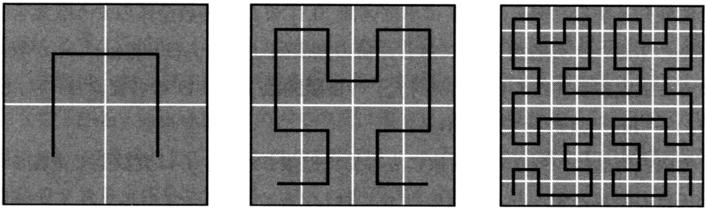


図 1.3

明確化と量化詞

この明確化について理解するために，はじめに，収束の概念がどのように定義されたのかをみよう。鍵となるのは，無限列の極限の概念である。実数[14] の無限列 $p_1, p_2, p_3, \ldots$ を $\{p_n\}$ と書くことにする。

> “数 c が数列 $\{p_n\}$ の**極限**である”とは，任意の正の実数 ε に対し，ある正の整数 m が存在して，m より大きい任意の整数 k に対し，p_k と c の差が ε より小さくなることである。

これはよく知られた記法を使うと短く書くことができる。

> “$\lim_{n\to\infty} p_n = \mathrm{c}$ である”とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある整数 $m > 0$ が存在して，任意の整数 $k > m$ に対し $|p_k - \mathrm{c}| < \varepsilon$ となることである。

$\lim_{n\to\infty} p_n = \mathrm{c}$ のとき，数列 $\{p_n\}$ は c に**収束する**といい，どんな数にも収束しない数列は**発散する**という。さらにより一般的な極限の概念があり，その一つの概念にあとでふれるが，いまは上記の定義で十分である。

ここで，無限級数 $s_1 + s_2 + s_3 + \cdots$ の収束条件を正確に述べることができる。はじめに，無限級数の部分和 p_n を以下のように定義する。$p_1 = s_1$，$p_2 = s_1 + s_2$，$p_3 = s_1 + s_2 + s_3$ とし，一般に，$p_{n+1} = p_n + s_{n+1}$ とする。数列 $\{p_n\}$ が収束するとき，無限級数は収束条件を満足するとし，$\{p_n\}$ が c に収束するならば，$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots = \mathrm{c}$ とする。いい換えると，無限級数の値は，その部分和の極限であるとする。数列の極限の定義は，ボルツァーノの，いたるところ微分できない関数を記述するために使われたような関数列の極限関数を定義するためにも使うことができる。$\{f_n\}$ は，同一の集合 D 上で定義され

た関数列とする。例えば，D は単位区間 [0,1] または実数全体のような集合であるとする。D の各要素 x に対し，値の無限列 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ が収束すると仮定する。このとき，列 $\{f_n\}$ の**極限関数** f は，D の各要素 x に対し，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ と定義される。

極限の概念は，列以外の対象にも容易に拡張される。f は実数上で定義された任意の関数とする[15]。任意の点 p に対し，x が p に近づくときの f の極限は次のように定義される。

> “$\lim_{x\to p} f(x) = \mathrm{c}$ である”とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の x に対し，$0 < |x-p| < \delta$ ならば $|f(x) - \mathrm{c}| < \varepsilon$ となることである。

どのような数 c もこの条件を満たさないならば，x が p に近づくとき f は極限をもたない。優れた知性が多くの年月を費すことで，極限の概念は，運動の概念を用いずに明確に表現されるようになった。鍵となるのは量化詞の組合せであり，それは徐々に近づく点として極限をとらえる経験的な考え方からはまったく明らかではない。ここで，連続性，つまり，以前に曲線が途切れていないときに関数がもつ性質として視覚的に導入された性質が定義できる。

> “f が p で**連続**である”とは，$f(p)$ が定義されていて，$\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ となることである。

ある区間 $[a, b]$ において関数が連続であるとは，a と b の間の任意の点において連続であることとし，範囲を限定することなく連続であるとは，定義されているすべての点において連続であることとする。

上で与えたような正確な定義は，19 世紀後半まで広まっていなかった。我々には，例えば，静止している目的地点に向かう点の視覚的なイメージのような経験に基づく情報源から，極限と収束の概念を引き出すことはできるが，このイメージから厳密かつ文字どおり正しい一般的定義を引き出すことは容易ではない。無限列の極限の定義に現れる「任意の正の実数に対し」，「ある正の整数が存在して」，「m より大きい任意の整数に対し」などの量化詞句の正しい順序を得るには，細心の注意が必要である。

これらの句が表す論理的事項である量化詞，および量化詞の論理は，我々の話題の中心的な部分であり，したがって，ここでそれらについて少し述べてお

こう。例えば,「Sirius shines (シリウスは輝く)」という文から名辞(主語)を取り除くと「... shines (は輝く)」という述語が残る。名辞に置き換わる量化詞句は，定義域，および述語が表す条件を満たす範囲を特定する役割をもつ。したがって,「Every star shines (すべての星は輝く)」の中の「Every star (すべての星)」は，定義域として星のクラスを特定し，述語の条件を満たす定義域の範囲も星のクラス全体を特定する。いくつかの例を示す。

量化詞句	**定義域**	**範囲**
Every star	星のクラス	全体
No planet	惑星のクラス	なし
Some galaxy	銀河のクラス	少なくとも 1 つ

範囲が“全体”の場合，量化詞は**全称的**であるという。範囲が“少なくとも 1 つ”の場合，量化詞は**存在的**であるといわれる。例えば,「... は ... の後続数である」というような関係条件を扱うときに，量化詞の列が使われる。この述語を用いて，すべての自然数[16]は，後続数をもつことを表したい場合，空所 ... に単に量化詞句をおくことはできない。例えば,「ある自然数はすべての自然数の後続数である」という文や「すべての自然数はある自然数の後続数である」という文は意図したいことを表していない。代わりに，すべての量化詞を前において，相互参照するための文字を使って，次のように表す。「任意の自然数 x に対し，ある自然数 y が存在して，y は x の後続数である。」　量化詞の順序を逆にすると真である主張が偽に変わる。「ある自然数 y が存在して，任意の自然数 x に対し，y は x の後続数である」という文は，ある数がすべての数の後続数であることを主張している。このように，量化詞の順序は重要なのである。

量化詞の順序の重要性は，ある偉大な解析学者の一つの誤りにより顕著に示されている。1821 年のコーシーの有名な『解析学教程』によって，解析学は明確化と厳密化へ向けて大きく進歩した。しかし，彼は無限小という言葉を使い続けたため，関数の無限列の各点収束と一様収束の差に気づかず，この混同が彼を誤った議論に導いた[17]。「任意の x に対し，ある y が存在して ...」と「ある y が存在して，任意の x に対し ...」の論理的な差に気づけば，量化詞の順序への注意によって，これらの 2 つの性質の差が明確になるのである。$\{f_n\}$ を

集合Dで定義された関数列とし，Dの各要素 x に対し，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在する，すなわち，値の列 $\{f_n(x)\}$，つまり，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x), \ldots$ は収束すると仮定する。このとき，“関数列 $\{f_n\}$ が f に**各点収束する**”とは，Dの各要素 x に対し，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ となることである。明確に書くと次のようになる。

> Dの任意の要素 x と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある整数 $m > 0$ が存在して，任意の整数 $k \geq m$ に対し $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ となる。

各点収束において，整数 m は，ε と x の両方に依存している。他方，一様収束においては，整数 m は ε だけに依存する。すなわち，与えられた ε に対し，Dのすべての要素 x に対して同じ m が役割を果たす。明確に述べると，“関数列 $\{f_n\}$ が f に**一様収束する**”とは，次が成り立つことである。

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある整数 $m > 0$ が存在して，Dの任意の要素 x と任意の整数 $k \geq m$ に対し $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ となる。

実数上で定義され，実数に値をもつ関数について考えると，一様収束性は，各正数 ε に対し，$k \geq m$ であれば，f_k のグラフは，極限関数 f のグラフからどの点でも垂直距離 ε の範囲内に入ることを意味する[18]。

数学の文脈では，一度に扱う領域は二，三個であることが多く，それぞれの領域を特定文字で表す慣習がある。例えば，自然数に対しては m, n，実数に対しては x, y, z が予約されている。したがって，実数に対する**アルキメデスの性質**は，次のように簡潔に表すことができる。

> 任意の x と任意の y に対し，$x > 0$ であれば，ある n が存在して，$n > 0$ かつ $nx > y$ となる。

このような場合，量化詞句で使われた記号は，相互参照のためだけでなく，量化詞の定義域を表すという役割を果たしている。このように使われることにより，量化詞句で使われた記号は，それが表す定義域を動く変数と考えられるようになる。与えられた文章における変数のすべての出現は，それに先行する同じ記号の量化詞句に結び付けられている。つまり，**束縛されている**。よって，量化詞句で使われた記号は，**束縛変数**とよばれる。

瞬間速度の問題がどのように解決されたのかをみよう。瞬間 t における物体

の速度は，曲線に沿って X が P に移動するときの PX の傾きの列の極限である，すなわち，h が 0 に近づくときの $[f(t+h)-f(t)]/h$ の極限である。$[f(t+h)-f(t)]/h$ を $\mathrm{F}(h)$ と書くとき，上で与えた関数の極限の定義を適用することにより，それを文字どおりかつ正確に述べることができる。

> $\lim_{h\to 0}\mathrm{F}(h)=\mathrm{c}$ であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ が存在して，任意の h に対し $0<h<\delta$ ならば $|\mathrm{F}(h)-\mathrm{c}|<\varepsilon$ となることである。

点 t における関数 f の**微係数** $f'(t)$ は，この極限である。すなわち，

> 極限の条件を満たす数が存在するという仮定の下で，$f'(t)=\lim_{h\to 0}\mathrm{F}(h)$ である。

t における物体の瞬間速度は，まさに，t における f の微係数である。

定義されているすべての点において，関数が微係数をもつとき，関数は**微分可能**であるといわれる。関数の微分可能性は，角または尖った点がないという意味において，曲線が局所的に滑らかであるという経験的性質に対応する解析的性質である。しかし，解析的性質は，経験的性質から読みとることはできない。一つの理由は，いくつかの微分可能な関数は，経験的に曲線として完全に表せないからである[19]。他の理由もある。局所的な滑らかさは，経験的な性質なので，拡大または縮小するとさまざまに変化する。局所的な滑らかさに段階があり，複数の解析的性質が局所的な滑らかさの対応物としての役割を果たす。さらに，連続性の解析的性質は，曲線が途切れていないという経験的性質と同じではない。解析的性質に対しては，定義に注目しなければならない。すでにみたように，定義の中身は，実数上を動く束縛変数をもつ入れ子になった量化詞である。同様の注意は，関数の積分可能性や解析学のすべての他の基礎的な性質に適用される。理路整然とした定義を得たのは，第一に，ボルツァーノとコーシーの，次いで，ディリクレとワイエルシュトラスの功績である。

この章では，解析学の基本的性質や関係の明確化を扱ってきた。これまでのところ，実数あるいは一般の点，点のクラス，点のクラス上の関数といった解析学の対象については，特に注意をはらわなかった。しかし，19 世紀後半，数学者は実数の明確な説明が必要であると感じるようになっていたので，上記の概要は不完全である。次の章では，この隔たりを埋め，カントルにより発見された (中には，創作されたという人もいるが) 超限数について説明を加える。

2

数とクラス

前章では，無限小を排した概念の明確化について述べた。しかし，十分な説明とはいえなかった。というのも，実数の説明がなかったからである。本章では，はじめにその必要性を述べ，2 通りのもっともよく知られた実数の取り扱いについて述べる。次に，超限順序数と基数の概念が点のクラスの研究から生じた道筋の概要と，それらの数体系の基礎について述べる。最後に，自然数の扱いをみる。これにより，数学的概念を明確にし，数学において容認されている方法と定理を健全な基礎の上におくためになされた 19 世紀の研究についての説明は完結する。

点と実数

19 世紀後半の解析学において，点の空間に関する我々の理解は初期の発展段階を終える。しかし，点は不可解である。次の問題を考えてみよう。もし，直線から 1 点を取り除いたならば，点があった場所に隔たりがなければならない。したがって，直線の残った 2 つの断片の間には，正の距離がなければならない。それゆえ，点は断片の間の距離と等しい正の幅をもたなければならない。しかし，点は幅をもっていない。さて，どこに間違いがあるだろうか。もう 1 つ問題を示す。連続な直線は，隔たりがまったくなく，その構成要素である点は，可能な限り近くに詰め込まれている。しかし，任意の 2 つの点の間に隔たりは存在するので，どの点も他の点に接触することはないはずであろう。このような問題は，我々が経験から得ている点の概念が，矛盾はしていないとしても，混乱していることを示している。解析学は，空間視覚的な要素への言及を排した点の説明を必要とし，この目的のために，数学者は数について考えた。3 次元空間における点が，1 つの原点をもつ座標軸 (垂直，水平，前後) の枠組みで位

置を定められていると考えるとき，点は順序づけられた実数の 3 つ組 $\langle x, y, z\rangle$ と同一視できる。ただし，x は点の水平の位置を表し，y は点の垂直の位置を表し，z は点の前後の位置を表す。一般に，n 次元空間の点は，順序づけられた n 個の実数の列と同一視できる。では，実数とは何であろうか。

実数の計算を適用できるような種類の量を用いて，この明確化を模索することは自然であろう。空間的な長さはこの種の量であり，時間と質量もそうである。ある特定の長さ (時間，質量など) を単位とすることにより，他の長さは，単位長さに対する比として特定される。以下を考えよう。

d の長さ $=r$ メートル

これは次と同値である。

$r=$ メートル原器の長さに対する d の長さの比

したがって，実数は，ある一般的な類いの量の比であるとして問題にとりかかることができる。しかし，どんな類いであろうか。通常は，物の個数のような離散的な量と対比がなされる。すべての量が (最初と最後を除いて) 直前と直後をもつ場合，量の体系は離散的である。我々は，長さ，時間などを離散ではなく稠密なものとして扱う。つまり，任意の 2 つの長さの間に，他の長さがあり，それゆえ無限個の長さがあり，どの長さも直前または直後をもたない。しかし，稠密性は十分ではない。整数 n, m $(m \neq 0)$ に対し，n/m の形をした数を有理数というが，有理数全体の体系は稠密である。しかし，有理数は長さを表すには不十分である。なぜなら，一辺の長さに対する正方形の対角線の長さの比は $\sqrt{2}$ であり，これは有理数ではないからである [1]。これだけが特殊な例ではない。斜辺でない辺の長さが 1 と $\sqrt{2}$ である直角三角形の斜辺の長さは $\sqrt{3}$ であり，$\sqrt{3}$ は無理数である。一般に，任意の正の整数 n に対し，斜辺でない辺の長さが 1 と $\sqrt{n-1}$ である直角三角形の斜辺の長さは $\sqrt{n}$ であり，$\sqrt{n}$ が整数でなければ，それは無理数である [2]。実数によって表される類いの量は，稠密であるだけでなく，ある意味の連続性をもたなければならないとは思われていたが，ここで連続性が何かは定かではなかった。したがって，実数が連続量の比であるということが判明しても，実数の明確な概念を得るためには，さらなる研究が必要だったのである。

数列と関数の性質を明確化しようとするのと同じく，実数を解明しようとする主要な動機は実用的な理由からであった。コーシーは数列の収束性に対して

有用な判定条件を提案した。

> 任意の ε に対し，ある整数 $m > 0$ が存在して，任意の $k > m$ に対し，$|s_m - s_k| < \varepsilon$ ならば $\{s_n\}$ は収束する。

これは正しいと"思われる"。もし，いくらでも小さい範囲に収まる数列のしっぽがみつかるならば，しっぽの先は 1 点にならなければならない。しかし，これが正しいことを証明するためには，実数体系の定義が必要である。もう 1 つの有用な仮説は，単調増加数列に含まれるすべての数が，ある与えられた数より小さければ，その数列は収束するというものである。これもまた正しいと思われる。下から上界[3]に近づきながら，数列の各要素がある 1 点になるまでだんだんと詰め込まれていき，その 1 点が数列の最小上界，つまり上限になると考えられるからである。しかし，これを証明するためにはまた，実数の定義が必要である。

実数の考察は多くの人々によって与えられた。ワイエルシュトラス，デデキント，カントル，メレー，ハイネ，その他。どの研究も，整数と有理数 (整数の比) をすでにあるものとしている。説明は 2 つのグループに分けられる。1 つのグループの方法は，有理数の数列により実数を定義する方法である。例えば，カントルは，次の条件，すなわち，"任意の有理数 $p > 0$ に対し，ある整数 $m > 0$ が存在して，任意の $k > m$ に対し，$|s_m - s_k| < p$ となる"を満たす有理数の数列 $\{s_n\}$ を使った。カントルはこのような数列を**基本列**とよび，各基本列が実数を表すと定めた[4]。これは，実数を表すために無限小数を使うときに我々が行っていることと本質は同じである。なぜなら，無限小数の次々に長くなる始切片により表される有理数列が基本列だからである。カントルは，2 つの基本列 $\{s_n\}$ と $\{t_n\}$ が同じ実数を表しているのは，n を大きくしたときに $|s_n - t_n|$ の極限が 0 になるとき，かつそのときに限ると付け加えた。基本列のこの関係は，コーシー同値として知られている。基本列は，排他的なクラスに分類され，同じクラスの要素はコーシー同値であり，異なるクラスの要素はコーシー同値でない。よって，コーシー同値な基本列の各クラスに対し，カントルは，唯一の実数を対応させた。カントルはさらに，彼の実数の定式化が正しいことを保証するために必要な定義と証明を与えた。収束に対するコーシーの判定条件は，カントルの実数の定義から導出できる。

もう 1 つの方法は，有理数を下のクラスと上のクラスに重なりなく分割することにより，実数を定義する方法である。そのようなクラスの組は切断として知られており，各組は，唯一の実数を表すために使われる。これはデデキントの方法である[5]。1 つの直線がもう 1 つの直線を切断しているとき，その交わる位置を点と考えることがある。デデキントの提案は，これに相応するものである。彼の定義は後の章で使われるので，やや修正した形のものをここで正確に述べる。A_1 と A_2 を有理数のクラスとする。順序対 (A_1, A_2) が**デデキント切断**であるとは，次が成り立つことである。

(i) A_1 と A_2 は両方とも空ではない。

(ii) 任意の有理数は，2 つのクラスのどちらか一方だけに属する。

(iii) 任意の有理数 p と q に対し，$p < q$ かつ q が A_1 の要素であれば，p もまた A_1 の要素である。

(iv) A_1 は最大要素をもたない。

さらに，A_2 が最小要素をもたないとき，(A_1, A_2) は“無理数”であると定義される。例えば，A_1 はすべての負の有理数および 2 乗して 2 より小さい正の有理数全体からなるクラスとし，A_2 は A_1 に含まれない有理数全体からなるクラスとするとき，(A_1, A_2) は無理数である。p を任意の有理数とし，A_1 を p より小さい有理数のクラス (したがって，p は A_2 の最小要素) とするとき，(A_1, A_2) を p^* と書くことにする。切断の順序は次のように定義される。$(A_1, A_2) < (B_1, B_2)$ であるとは，B_1 の要素であり，A_1 の要素でない有理数 p が存在することである。この定義から，この順序の推移律と次のような三分律が成り立つ。任意の切断 c と d に対し，$c < d$, $c = d$, $d < c$ のいずれか 1 つだけが成り立つ。切断 c が“負”であるとは $c < 0^*$ であることとし，“正”であるとは $0^* < c$ であることとする。

切断が実数としての役割を果たすためには，切断上に算術演算を定義し，その演算が，例えば，加法と乗法の可換律と結合律のような実数の算術のよく知られた法則に従うという証明が必要である。例として，加法の定義だけを述べる。(A_1, A_2) と (B_1, B_2) を切断とする。A_1 のある要素 p と B_1 のある要素 q に対し，$p + q$ となる有理数全体のクラスを C_1 とし，C_2 はそれ以外の有理数とする。このとき，(C_1, C_2) が切断であることが証明でき，この切断が和

$(A_1, A_2) + (B_1, B_2)$ であると定義される。読者が退屈しないように，他の算術演算と逆演算 ($-x$ と x^{-1}) の定義は与えないが，それらは解析学の多くの入門書でみつけられる[6]。このように，定義された演算と特別な要素 $0^*, 1^*$ を伴った切断の集合が順序体を形成することが証明できる[7]。

有理数とその上の演算はすでに順序体を形成している。したがって，有理数と実数を区別し，順序体であるという条件からは導くことができない構造的性質があるに違いない。その重要な性質は，連続性または完備性として知られている。これは切断の順序についての性質であり，同じ名称を与えられた関数の性質と同じではない。これに関連して，直線上の点の順序について 2 つの幾何学的法則がある。一つは，直線上の任意の 2 つの点の間には他の点があるという“稠密性”の法則である。切断が順序体を形成していることから，それらが稠密に順序づけられていることを示すことができる。幾何学のもう 1 つの法則は，直線を上と下の点の 2 つのクラスへどのように分割する場合も，分割を生成する唯一の点が存在するというものである。デデキントは，この性質が直線を連続にする (稠密性に加えられた) 重要な性質と特定した。そして，彼は，切断が“連続性”に対応する性質をもつことを証明した。すなわち，切断全体のクラスを空でない 2 つのクラス C, D に分割して，C の任意の要素 c と D の任意の要素 d に対し $c < d$ となるとき，C における最大の切断または D における最小の切断がただ一つ存在する。これは現在，デデキントの**連続性** (または**完備性**) **公理**として知られている以下の原理と同値である。

上界をもつ切断の空でない任意のクラス S は最小上界をもつ。

切断は連続または完備な順序体を形成し，この事実は切断が実数の役割を十分果たせることを意味している。特に，コーシーの収束判定条件のように，多くの解析学の議論において使われてきた証明されない仮定を，デデキントは証明可能にした。

他の問題を扱う前に，実数のこれらの定式化について少し考えよう。19 世紀の解析学で研究された空間における点は，実数を使って定義され，実数は，有理数を使って定義されるが，このような議論では重要なことを見逃している。実数のどちらの定義も，無限のものから無限個の要素を引き出してつくられるクラスまたは列を含んでいるのである。カントルの定義は，有理数の無限クラ

スを与えられたものとして扱うだけでなく，有理数からなる基本列全体のクラスが存在することを仮定している。このクラスは，我々が実際定義できる列に限らず，“任意の”基本列を含むクラスである。対象となる列は無限にある。デデキントの定式化もまた，我々が定義をもっている分割に限らずに，上のクラスと下のクラスへの有理数のすべての分割のクラスが存在することを仮定している。下のクラス (すなわち，$p < q$ かつ q が C の要素であれば p もそうであるようなクラス C) についていえば，それぞれは無限の対象であるが，任意の下のクラスの全体の存在があたりまえに扱われる。じつは，列はクラスとして表され，無限列は無限のクラスとして表される[8]。したがって，2つの定式化は，どちらも，無限のものの中から任意に引き出した無限個の要素のクラス全体の存在を仮定していることになる。このことは重要である。直線上の点に関する我々の直観的概念は，実数の厳密な概念を与えるのに十分ではない。我々は無限のクラスのようなものとしか実数を把握していない。実数や古典的解析学の点は，通常 微小と考えるものの数学的対応物であるにもかかわらず，無限の対象なのである。

もう1つ問題がある。上では2つの実数の定義を述べた。一方において，実数はコーシー同値な有理数の基本列のクラスと同一視される。もう一方において，実数は有理数の下のクラスと上のクラスの組，切断と同一視される。しかし，どの切断もコーシー同値な基本列のクラスではない。したがって，1つの実数が，切断であり，かつ，コーシー同値な基本列のクラスの両方ではありえない。その結果，これらの定義の1つまたは両方が間違っていると思われる。しかし実際は，どちらの定義も間違っていない。カントルもデデキントも，実数に対する形而上学的な同一性条件を与えているとは考えていなかった[9]。それに代わる一つの考え方は，それらが実数の代替物を定義しているとみなすことである。それぞれの方法は，代替物の定義だけでなく，代替物の性質や演算の定義を含んでいる。各定義体系の役割は，実数の推定される体系がもつ構造的な特徴をもっていることが証明できるように，対象物のクラスとその上のいくつかの性質と演算を選び出すことである。19世紀後半に数学者が直面していた問題は，これらの特徴をすべてもつものの集まりがあるという信念を確かめることであった。もし，これらの特徴が完備な順序体の定義条件にまとめられたと考えると，その問題は，完備な順序体のようなものが存在しうること，いい

換えると，その構造を表す何かが存在しうることを示すことであった。どちらの方法も，対象物の構造を定義し，それが完備な順序体になるためのすべての条件を満足することを示すことによりこれを行う。それが，なされたすべてであり，数学的問題を解決するために必要とされたすべてであった。さらなる疑問は形而上学の問題であり数学の問題ではない。つまり，それが存在したとして，実数とは何であろうかということである。任意の 2 つの完備な順序体は同型である。すなわち，それぞれはすべての構造的性質を保存して 1 対 1 に他方の上に写像される。つまり，それらのすべてはまったく同じ構造をもち，それゆえ我々は，それらをまとめて完備な順序体の“その”構造とよぶことができる。形而上学的な問題に対して，今日，広く認められている一つの答えは，実数はその構造における配置以上の何ものでもないということである。その答えを認めたとして，数学と同様に形而上学にも重要な課題は，そのような構造が存在することを示すことであった。それが，事実上，カントルとデデキントによって (異なる方法で) なされたのであった。

点クラスと超限指数

点クラスの一般的な研究は，直線上の点のクラス，すなわち実数のクラスの研究から生じた。(以後，実数を実点，実数のクラスを実直線ともよぶ。また，整数の実点と有理数の実点を表すために，切断の記法である n^*, $(p/q)^*$ をやめて通常の数表示を用いる。実数について述べるときに,「実」という修飾語句を省略することもある。) カントルの初期の研究は，数学者リーマンにより研究されたある形式の実数の三角級数の研究であった[10]。この研究の過程において，カントルは超限順序数の理論の芽生えを含むいくつかのまったく新しい概念を開発した。その新しい概念は，点クラスの理論において現在では標準的なものである。カントルは，実直線上の点に対する定義を与えたが，それらは容易に 2 次元以上の空間に一般化される。まず，一つの定義を与えておく。

> p を任意の点とし，C を任意の点クラスとする。p が C の**極限点**であるとは，p を含む任意の開[11]区間が C の無限個の点を含むことである。

C の極限点のクラスを C′ と書く。このとき，カントルは，C の n 番目の**導クラス** $\mathrm{C}^{(n)}$ を次のように定義した。

$$\mathrm{C}^{(1)} = \mathrm{C}', \qquad \mathrm{C}^{(n+1)} = \mathrm{C}^{(n)\prime}.$$

明らかに，点クラスが有限であれば，その極限点のクラスは空である。もし，C が無限クラスであれば，n 番目の導クラス $\mathrm{C}^{(n)}$ は有限となりうるので，すべての $\mathrm{C}^{(n+m)}$ は空となりうる。C が**第 1 種**のクラスであるとは，ある有限の正の整数 n に対し，$\mathrm{C}^{(n)}$ が有限となることである。もしそうでなければ，**第 2 種**のクラスである。

点クラスに関するカントルの研究は，第 2 種のクラスの研究に彼を導いた。C が第 2 種のクラスであれば，それは極限点，つまり，$\mathrm{C}^{(1)}$ の要素で，有限指数 n をもつすべての導クラス $\mathrm{C}^{(n)}$ に現れる点をもつであろう。このような点のクラスをカントルは $\mathrm{C}^{(\infty)}$ と表した。この記法を自然に拡張することにより，カントルは $\mathrm{C}^{(\infty)}$ の最初の導クラスを $\mathrm{C}^{(\infty+1)}$ と定義し，一般に，$\mathrm{C}^{(\infty)}$ の n 番目の導クラスを $\mathrm{C}^{(\infty+n)}$ と定義した。有限の正の整数 n に対するすべての $\mathrm{C}^{(\infty+n)}$ に含まれる点のクラスを $\mathrm{C}^{(\infty+\infty)}$ $(= \mathrm{C}^{(2\infty)})$ とすることにより，この操作は明らかに続けられる。同じように定義の 2 つの原則を使うことにより，すべての有限の正の整数 n と m に対し，$n\infty + m$ の形の指数をもつ導クラスが得られることは簡単にわかる。これらのすべてのクラスに属する点のクラスは，指数 $\infty \cdot \infty$ または ∞^2 をもつ。このように続けることにより，カントルは，

$$n_0\infty^m + n_1\infty^{m-1} + \cdots + n_m$$

という形と (大きな飛躍をして)

$$\infty^\infty,\ n\infty^\infty,\ \infty^{\infty+1},\ \infty^{\infty+n},\ \infty^{n\infty},\ \infty^{\infty^n},\ \infty^{\infty^\infty}, \ldots$$

という形の指数をもつクラスを得た。カントルは後に，この超限の体系を自然数の拡張となる意味ある数の体系とみなすようになった。しかし，彼の当初の興味は，自然数の拡張にはなかった。彼の主要な目標は，連続体，すなわち実直線を特徴づけることであり，そのための道具を作り出すねらいから第 2 種の導クラスの分類を開発したのであった [12]。連続体への探求の過程において，彼は，ベキまたは濃度の観点から実点の無限クラスを比較し，いくつかの驚くべ

き発見をした。しかし彼は，無限クラスの濃度の大きさについて自然で体系的な定式化をみつけることがなかなかできなかった。やがて彼は，この問題の鍵は，第2種の導クラスの分類ですでに事実上発見していた超限数の体系だと理解した。これらの数が超限順序数である。順序数は本書において繰り返し重要な道具として用いられるので，基本的な考え方を手短かに述べておくことは有用であろう。

順序数

はじめに，クラスの上のある種の順序を定義する。

> クラス C が関係 $<$ により**整列に順序づけられている**とは，$<$ が C の狭義線形順序[13]であり，C のすべての空でない部分クラスが $<$– 最小元[14]をもつことである。

この定義から，もし，C が $<$ により整列に順序づけられていて，B が C の (C 全体ではない) 始切片であれば，B のすべての要素の後にある C の最初の要素が存在する。整列に順序づけられているクラスの例は，通常の大小関係で順序づけられた自然数のクラスである。対照的に，大小関係で順序づけられた有理数のクラスは，線形であるが，整列に順序づけられていない。なぜなら，部分クラス $\{1/2, 1/4, 1/8, \ldots, 1/2^n, 1/2^{n+1}, \ldots\}$ は最小要素をもたないからである。

無限クラスは，多くの異なる方法で整列に順序づけられる。例えば，$<$ で順序づけられた自然数

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

は，最初の要素をもつが，最後の要素はもたず，最初の要素は，ただ一つの始まりの要素，すなわち直前をもたない要素である。クラスを順序づける方法は，順序型として知られている。2つの順序づけられたクラス $(\mathrm{A}, <_\mathrm{A})$ と $(\mathrm{B}, <_\mathrm{B})$ が同じ順序型をもつとは，A の要素と B の要素の間の1対1の関連づけ c があり，$x <_\mathrm{A} y$ となるのは，$c(x) <_\mathrm{B} c(y)$ であるとき，かつそのときに限ることである。比喩的な言葉でいえば，それぞれの順序 $<_\mathrm{A}$ と $<_\mathrm{B}$ で並べられた A の要素の列と B の要素の列が平行におかれ，A の要素と B の要素の間を直線で結び，直線が交わることなく，1対1の組ができることである。$<$ により順

序づけられた自然数の順序型は ω として知られている。もし次のように，最初の3つの数が，他の数の順序はそのままに他のすべての数の後ろにおかれると，その結果は順序型 $\omega+3$ の整列クラスになる。

$$3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots 0, 1, 2.$$

これは最初の要素と最後の要素をもち，2つの始まりの要素をもつ。もし，偶数がすべての奇数の後ろにおかれ，それ以外はふつうの順序とすれば，順序型 $\omega+\omega$ の整列クラスを得る。

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$$

同じクラスの異なる順序が，同じ順序型をもつ可能性もある。例えば，すべての3の倍数を残りの数の後におき，それ以外はふつうの順序としても，順序型 $\omega+\omega$ である。

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots 0, 3, 6, 9, \ldots$$

これらの例においては，同一の無限クラスが，異なる方法で整列に順序づけられている。では，自然数の順序から自然数の順序対の順序に移ろう。$\langle n, m\rangle$ を n 番目の行と m 番目の列に並べて考える。

$$\begin{array}{cccc}
\langle 0,0\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,2\rangle & \ldots \\
\langle 1,0\rangle & \langle 1,1\rangle & \langle 1,2\rangle & \ldots \\
\langle 2,0\rangle & \langle 2,1\rangle & \langle 2,2\rangle & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

このクラスにおいて次のような順序を考えよう。ある行の各要素は，それより下にある行のどの要素よりも前にあり，ある行の中では，各要素はその右にあるどの要素よりも前にある。各行は，順序型 ω をもち，行のクラスは順序型 ω をもつ。よって，全体の配列の順序は $\omega\times\omega$ の順序型である。

順序数は整列に順序づけられたクラスの順序型である。順序数には3つの種類がある。(i) 最初の順序数は (空の順序をもつ) 空クラスの順序型であり，0とよぶ。(ii) α が順序数であれば，α の次の順序数 $\alpha+1$ は,「先行する」という順序のもとで，α までのすべての順序数を含むクラスの順序型である。よって，順

序数 1 は $\langle 0\rangle$ の順序型，2 は $\langle 0,1\rangle$，3 は $\langle 0,1,2\rangle$，そして，$\alpha+1$ は $\langle 0,\ldots,\alpha\rangle$ の順序型である。(iii) 終わりがなく途中欠如もない順序数の任意の列に対し，その列の後にくる最初の順序数が存在する。この順序数は，その順序数列のすべての順序数からなるクラスの,「先行する」という順序のもとでの順序型である。このような順序数は，極限順序数として知られている。最初の極限順序数は有限順序数のクラス $\langle 0,1,2,3,\ldots\rangle$ の順序型 ω である。0 以外のすべての順序数は，後続順序数または極限順序数である。したがって，順序数を生成する 2 つの方法がある。与えられた順序数の後続数に進む方法と，終わりのない連続列に対してそのあとの最初の順序数に進む方法である。これらの生成原理のもとで，我々は，第 2 種の導クラスの指数により映し出される順序数の構造がすぐにわかる。m と n は自然数上を動くとする。このとき，以下のような順序数が得られる。

$\omega+(n+1)$	$\omega+n$ の後続数
$\omega+\omega\ (=2\omega)$	$\omega+n$ の形の順序数の列の極限
$n\omega+(m+1)$	$n\omega+m$ の後続数
$\omega\cdot\omega\ (=\omega^2)$	$n\omega+m$ の形の順序数の列の極限

これらの 2 つの方法で進めると，

$$n_0\omega^m+n_1\omega^{m-1}+\cdots+n_m$$

という形の順序数を得て，その極限が ω^ω となる。この方法により，やがて以下のものに到達する。

$$\omega^\omega,\ \omega^{n\omega+m},\ \omega^{\omega^n},\ \omega^{\omega^\omega}\ \ldots$$

カントルは，順序数のこの理論を提示しただけでなく，順序数の算術の開発へ進んだ[15]。この研究の過程で，超限順序数と有限順序数の類似点と相違点が明らかになった。著しい類似点は，任意の有限数が 10 のベキの和として一意の表現をもつように，任意の順序数 α は ω のベキの和として一意の表現をもつことである。著しい相異点は，順序数の加法の非可換性である。例えば，$1+\omega=\omega\neq\omega+1$ となる。このことからカントルは，無限数の存在仮説に対し古くから何度も繰り返された反対意見に対し，2 通りの反論を与えることになった。ここで，その反対意見とは，正の有限数と無限数の加算は，有限数を無効にし，無限数と

なるというものである。はじめに，カントルは，有限数のすべての法則が有限でない数に対しても成り立たなければならないということが誤りであると指摘した。自然数に対する他の拡張と同様に，拡張した体系で成り立つ法則もあれば，成り立たない法則もある。第二に，カントルは，有限順序数に無限順序数を加えると無効化が起こるが，正の数 n に対し $\omega < \omega + n$ であるから，無限順序数に正の有限順序数を加えることは，有限の数を無効化しないことを指摘した[16]。このことは，類似は相異を伴うということをうまく表している。

基 数

連続体の研究を通して，カントルは，自然数との対応によって数え上げられる多くの無限クラスを発見した。それらのどのクラスも連続な切片を含まないので，実点の連続なクラスが自然数による数え上げを越えていると推測することは自然であった。デデキントへの質問の手紙で[17]，カントルは次のように書いている。「(自然数のクラス $\mathbb{N}$ と実数のクラス $\mathbb{R}$ を 1 対 1 対応させることは) 一見して無理だという人もいるかもしれない。なぜなら，$\mathbb{R}$ は連続体を形成するが，$\mathbb{N}$ は離散的な部分からなるからである。しかし，この反対理由からは何も得られない。」カントルは，離散的に順序づけられていない有理数のクラスが，“数え上げられる”($\mathbb{N}$ と 1 対 1 の関係がある) ことを発見した。この事実のカントルの証明の一つを示そう[18]。正の有理数が正の整数で数え上げられることを示せば十分である。なぜなら，そのような数え上げがあれば，すべての正の整数 n に対し，$2n$ と n 番目の正の有理数 p/q を，$2n-1$ とそのマイナス $-(p/q)$ を，そして 0 を 0/1 と関連づければよいからである。さて，n 行の有理数は分母 n をもち，m 列の有理数は分子 m をもつように，正の有理数を行と列に並べる (図 2.1)。

数え上げは，すでに現れた有理数を除いて，矢印で示された順序で行う。よって，2/2 は 1/1 という形ですでに現れているので飛ばされる。したがって，数え上げは，以下のようにはじまる。

(1) 1/1, (2) 2/1, (3) 1/2, (4) 1/3, (5) 3/1, (6) 4/1, ...

明らかに，これは正の整数と正の有理数の 1 対 1 の関連づけである。

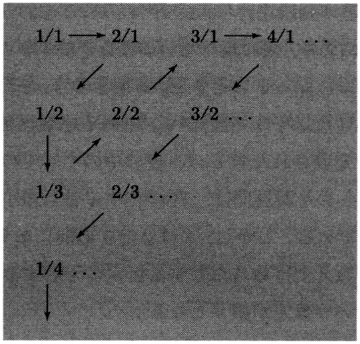


図 2.1

任意の2つの有理数の間に無限個の有理数が存在するという事実にもかかわらず，自然数より多くの有理数が存在しないという発見は，ちょっとした驚きであった。カントルは，この事実が，すべての代数的実数のクラス，すなわち，

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

という形の方程式の実数解のクラスにも成り立つことを証明した。代数的でない実数が存在することは知られていた[19]。それでは，連続体 $\mathbb{R}$ はどうなっているであろうか。カントルは，$\mathbb{R}$ が数え上げられないことを証明した[20]。このことについて，彼の証明の一つを示そう[21]。0と1の間の実数のクラスが数え上げられないことを証明すれば，明らかに十分である。そこで，0と1の間の実点の数え上げが存在すると仮定して矛盾を導く。各実数を小数展開し，数え上げの順序に従って n 番目の実数の下に $n+1$ 番目の実数をおく。もし，ある実点が2つの小数展開をもつならば，例えば，0.3000...ではなく，0.2999...を選ぶように，9が繰り返しているほうを選ぶ。$\mathrm{r}_{k,n}$ を k 番目の小数の小数点以下 n 桁目の数字とする。

1	$\mathrm{r}_{1,1}$	$\mathrm{r}_{1,2}$	$\mathrm{r}_{1,3}$	$\mathrm{r}_{1,4}$	...
2	$\mathrm{r}_{2,1}$	$\mathrm{r}_{2,2}$	$\mathrm{r}_{2,3}$	$\mathrm{r}_{2,4}$	...
3	$\mathrm{r}_{3,1}$	$\mathrm{r}_{3,2}$	$\mathrm{r}_{3,3}$	$\mathrm{r}_{3,4}$	...
4	$\mathrm{r}_{4,1}$	$\mathrm{r}_{4,2}$	$\mathrm{r}_{4,3}$	$\mathrm{r}_{4,4}$	...

さて，この対角線の数字列に注目し，1の代わりに9をおき，それ以外の数の代わりに1をおくことにより，表に現れない小数を定義することができる。もう少し詳しく説明すると，$r_{n,n}=1$ のとき $c_n=9$ とおき，$r_{n,n}\neq 1$ のとき $c_n=1$ とおく。そして，小数点以下 n 桁目が c_n である小数展開 $0.c_1c_2c_3c_4\ldots$ をもつ実数を c とする。定義された数 c は，表の中のすべての実数と異なる。なぜなら，各 n に対し，c の小数展開は，表の中の n 番目の小数展開と小数点以下 n 桁目で異なるからである。しかし，c は0と1の間にある。これは，0と1の間のすべての実数が数え上げられたとする仮定に矛盾する。それゆえ，それらが数え上げられるという仮定が誤りとなる。

2つのクラスが“同じ濃度”をもつとは，そのクラスの間に1対1の関連づけが存在することである。クラス B の濃度がクラス C の濃度より“小さい”とは，B と C の部分クラスの間に1対1の関連づけが存在し，B と C の間には1対1の関連づけが存在しないことである[22]。クラスの濃度は，その基数，つまり，そのクラスの要素の個数である。少ない要素をもつことは，小さい基数をもつことである。カントルは，基数により無限クラスを比較した初めての人物であった。実数が数え上げられないことの彼の証明により，彼は少なくとも2つの無限基数が存在することを明らかにした[23]。彼はより高次元の連続体を調べることにより，より多くの無限基数が発見されることを期待した。単位長さの線分は，単位長さの辺をもつ正方形よりも少ない点をもつはずで，それもまた，単位長さの辺をもつ立方体よりも少ない点をもっているはずである。しかし，そうではないことを発見し，カントルは「私はそれを理解するが，信じられない」と叫ぶほどに驚いた[24]。実際，直線の一部，あるいはどんなに短い $\mathbb{R}$ の区間も，任意の有限の n に対する n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ 全体と1対1に関連づけられるのである。

カントルは，実直線よりも高い濃度の点クラス (高次元連続体) を発見できなかったが，彼はより高い濃度のクラスが存在すること，実際，いくらでも高い濃度のクラスが存在することを示した。より明確にいうと，任意のクラス M に対し，M の部分クラス全体のクラスは，M よりも大きい濃度をもつことを，それらの間の1対1の関連づけの不可能性を示すことにより証明した。この事実はカントルの定理として知られている[25]。彼は，連続体が数え上げられないことを示すために考え出した対角化の方法を修正することにより，これを行った。

証明の考え方は，M とその部分クラスのクラスの間に 1 対 1 の関連づけが存在すると仮定して，その仮定から矛盾を導き，それにより仮定が誤っていることを示すというものである。M を任意のクラスとし，M の部分クラス全部からなるクラス ℙM と M の 1 対 1 の関連づけを c とする。

M の要素	c	M の部分クラス
a	$\longleftrightarrow$	$\mathrm{c}(a)$
b	$\longleftrightarrow$	$\mathrm{c}(b)$
c	$\longleftrightarrow$	$\mathrm{c}(c)$
$\vdots$		$\vdots$

次に，以下のような表を作成する。まず，クラス M の要素を一番上の行に並べる。それから下の行は，0 と 1 の列によって部分クラスを表す。つまり，ある行の j 番目が 0 であることは，j 列目の一番上にある M の要素が，行により表されている部分クラスの要素 “ でない ” ことを意味する。行の j 番目が 1 であることは，j 列目の一番上にある M の要素が，その部分クラスの要素 “ である ” ことを意味する。また，部分クラスが並べられている順序は，M の要素が並べられている順序により決まっているとする。したがって，もしその順序が $a, b, c, \ldots$ であれば，$\mathrm{c}(a)$ の行が最初にあり，次に $\mathrm{c}(b)$ の行があり，次に $\mathrm{c}(c)$ があるというように続く。そうして下のような表を得る。

	a	b	c	d	e	$\ldots$
$\mathrm{c}(a)$	**0**	1	1	1	0	$\ldots$
$\mathrm{c}(b)$	0	**0**	0	0	0	$\ldots$
$\mathrm{c}(c)$	1	0	**1**	0	0	$\ldots$
$\mathrm{c}(d)$	0	1	0	**1**	0	$\ldots$
$\mathrm{c}(e)$	1	1	0	0	**0**	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

対角線は，それに関連づけられている部分クラスに M のどの要素が含まれるかを表している。上の表の対角線をみて，まず a はそれに対応する $\mathrm{c}(a)$ に含ま

れず，b は $\mathrm{c}(b)$ に含まれず，c は $\mathrm{c}(c)$ に含まれるなどということがわかる。対角線は，M の要素 x で，それに関連づけられている部分クラス $\mathrm{c}(x)$ に含まれるものからなる M の部分クラスを特定する。つまり，条件 φ を満たす x のクラスを $\{x:\varphi(x)\}$ と記すと，対角線は，$\{x:x\in \mathrm{M}\ \&\ x\in \mathrm{c}(x)\}$ を表す。表に並べられた 5 つの M の要素の中で，c と d だけが，このクラスに属する。もし，対角線の 0 と 1 を交換すると，その結果は，M の要素 x で，それに関連づけられている M の部分クラスに含まれ“ない”要素からなる M の部分クラス，すなわち，カントルのクラス $\{x:x\in \mathrm{M}\ \&\ x\notin \mathrm{c}(x)\}$ を得る。このようにしてクラスを得ることは，**対角化**として知られている。仮定により，c は M の要素と M の部分クラスの間の 1 対 1 の関連づけであるから，$\mathrm{c}(m)$ がカントルのクラスとなるような M の要素 m が存在する。しかし，これは不可能である。なぜなら，M の任意の要素 m に対し，m が一番上にある列において $\mathrm{c}(m)$ がどんな値をもつとしても，カントルのクラスは，その列にあるものとは別の値をもつように構成されているからである。したがって，M の任意の要素 m に対し，カントルのクラスが表す 0 と 1 の列は，$\mathrm{c}(m)$ の表す列とは異なる。これは，M の任意の部分クラスが M の要素と 1 対 1 に関連づけられるという仮定に矛盾する。

このようになされた議論に対するもっともな反論は，M が数え上げられない無限であれば，その要素を行に並べられるという考え方は，疑わしいというものである。しかし，上の議論の根幹は，この仮定を必要としない。長方形の配列とその対角線という視覚的考え方はなくても困らないものであり，カントルのクラスを発見するための一つの認識手段にすぎない。その議論自身は，単にこのようなものである。M とその部分クラスのクラス $\mathbb{P}\mathrm{M}$ の 1 対 1 の関連づけを c とする。このとき，C を $\mathrm{C}=\{x:x\in \mathrm{M}\ \&\ x\notin \mathrm{c}(x)\}$ のように定義する。明らかに，C は M の部分クラスである。したがって，M のある要素 m に，C が関連づけられていなければならない。すなわち，$\mathrm{C}=\mathrm{c}(m)$. ここで，2 つの場合が考えられる。(i) $m\in \mathrm{c}(m)$. このとき，m は C の要素であるための条件を満たさない。したがって $m\notin \mathrm{C}$ である。しかし，仮定により $\mathrm{C}=\mathrm{c}(m)$ である。よって，$m\notin \mathrm{c}(m)$ となる。つまりこの場合は，m が $\mathrm{c}(m)$ に含まれ，かつ，含まれないことになり，これは不可能である。(ii) $m\notin \mathrm{c}(m)$. このとき，m は C の要素であるための条件を満たす。したがって $m\in \mathrm{C}$ である。しかし，

仮定により $\mathrm{C} = \mathrm{c}(m)$ である。よって，$m \in \mathrm{c}(m)$ となる。つまりこの場合も，m は $\mathrm{c}(m)$ に含まれ，かつ，含まれないことになり，これは不可能である。どちらの場合も矛盾にたどりつく。それゆえ，M と $\mathbb{P}$M の間に 1 対 1 の関連づけがあるという仮定は誤りである。

しかし，M と $\mathbb{P}$M の部分クラスの間に 1 対 1 の関連づけは存在する。例えば，M の各要素 m に，m だけを要素とするクラスを関連づければよい。したがって，$\mathbb{P}$M は少なくとも M と同じ個数の要素をもつが，それらは同じ個数の要素をもたないので，$\mathbb{P}$M は M よりも多く要素をもつと考えることが妥当である。この議論は M にまったく仮定をおいていないので，すべてのクラスに適用できる。よって，$\mathbb{N}$, $\mathbb{PN}$, $\mathbb{PPN}$, ... のように，いくらでも大きい超限基数が存在する。しかしながら，カントルは，$\mathbb{N}$ の濃度の後にある最初の濃度が，$\mathbb{PN}$ の濃度であることを示せなかったので，超限の濃度の分類法として，この列を使うことができなかった。中間に濃度があるかもしれなかった。カントルは，連続体 $\mathbb{R}$ の濃度が，$\mathbb{PN}$ の濃度と同じであることを知っていた。したがって，彼が直面している問題は，連続体の濃度が，最初の無限濃度である $\mathbb{N}$ の濃度の後にある最初の濃度であるかどうかであった。カントルは，$\mathbb{N}$ の濃度をもつ連続体上の点の無限クラスと $\mathbb{R}$ の濃度をもつクラスを数多く発見した。しかし，彼は，中間の濃度をもつクラスを 1 つも発見しなかった。したがって，中間には濃度が存在しない，つまり，連続体の濃度は 2 番目の超限の濃度であると予測することは妥当であった。これが，カントルの連続体仮説である。カントルは，連続体仮説を証明するために努力したが，成功しなかった。彼は，他のところに，無限基数を分類する体系的な方法を探さなければならなかったのである。

アレフ

彼は，順序数の列の中に鍵をみつけた。有限順序数のクラスを第 1 数クラスと彼はよんだ。次に，第 2 数クラスは，α より前にある順序数のクラスが，第 1 数クラスと 1 対 1 に関連づけられるような超限順序数 α からなるクラスとした。カントルは，最初の超限基数が第 1 数クラスの濃度であり，2 番目の基数が，第 2 数クラスの濃度であることを示した。これを一般化することにより，カントルは超限基数の終わりのない連鎖，すなわちアレフの列を定義した。

$\aleph_0 = \mathbb{N}$ の濃度,

$\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha$ 個の前者をもつ順序数すべてのクラスの濃度,

もし，λ が極限順序数であれば,

$\aleph_\lambda = \lambda$ より小さいある順序数 α に対し，$\aleph_\alpha$ 個の前者をもつ順序数 β 全体からなるクラスの濃度[26]。

カントルは，すべての超限基数があるアレフであり，$\aleph_\alpha$ の次の基数は $\aleph_{\alpha+1}$，そして極限順序数 λ に対し，$\aleph_\lambda$ は，β を λ より前にあるとするとき，すべての $\aleph_\beta$ より後にある最初の基数であることを示した。このようにして，彼は，超限基数の分類を定義した。カントルはまた，有限と超限基数の算術を含むように基数全体に対して算術演算を定義し，アレフの算術を開発することで，有限算術の法則と同じ部分と異なる部分を明らかにした。この算術を使うことにより，彼は，連続体の濃度が $2^{\aleph_0}$ であることを示した。よって，彼は，連続体仮説の純粋に算術的な表現をみつけた。すなわち，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ である。しかし，それを証明 (または反証) できないまま現役の数学者としてのカントルの経歴は終わり，ダヴィット・ヒルベルトが数学界のスターとして登場した。1900 年の第 2 回 国際数学者会議における有名な講演の中で，ヒルベルトは 23 の未解決問題の最初の問題として連続体問題を取り上げた[27]。

カントルの超限基数の理論は，超限順序数の発見と順序数の算術の開発とともに重要な知的業績となった。超限基数が記法だけのつくり事ではなく，有限基数と同等に，現実に存在している数であるとみなすことが正当であるとカントルは考えた。しかし，カントルの体系は，非常に大きな抵抗または少なくとも懐疑論に直面しなければならなかった。実無限の認知を不可能とするアリストテレス以来の伝統的な哲学的論証による抵抗があっただけではなかった。カントルのかつての師であり，彼の初期の研究の称賛者の一人である影響力の大きい数学者クロネッカーからの非常に強烈な反対もあった[28]。クロネッカーの反対は，超限数の理論に対してだけではなかった。よく引用される次の言葉が，実数論以降のカントルの研究の方向性に敵対する彼の立場を表している。「親愛なる神が整数をつくった。それ以外のものはすべて人間の仕事である[29]。」

自然数

実数をフィクションとみなすクロネッカーの見解はほとんど受け入れられなかったが，整数，特に自然数は人間の創作からは独立で純粋な存在であるという考え方には多くの者が賛成した。ところが，中には，自然数とその上の演算を定義する必要があると考えた人もいた。そうすれば，算術の法則を証明できるだろう。これは単に，厳密さを追求する大きな力が押し寄せていたからではなかった。デデキントとフレーゲは，独立したかなり異なる動機をもって自然数の定義を与えた。

デデキントは，自然数の理論が論理の一部であるといった。しかし，彼は，論理に対する明確な構想をもっていなかった。自然数に関する彼の研究の初版への序文において，彼は次のように書いた。「算術 (代数学，解析学) を論理の一部として語るとき，数の概念は空間や時間の直観または概念とはまったく独立であると考えているつもりである...」[30] デデキントは，我々の実数の理解を幾何学的または力学的な直観への依存から解放するために，有理数のクラスによって実数の定義を与えた[31]。だが，有理数は整数により理解され，整数は自然数により理解される。それゆえ，自然数の我々の理解が空間と時間の直観に依存しているならば，彼の初期の研究の目標，すなわち実数の論説は，達成されないことになるだろう。

フレーゲもまた，自然数の理論，そしてさらに，実数の理論は論理の一部であると主張した。フレーゲは論理に対する明確な構想をもっており，それは，あらっぽくいうと，述語の外延の理論としての論理であり，命題論理と量化詞の論理として我々が現在考えるものを含んでいる。彼の関心は，算術が，カントが主張したように総合的ではなく，定義と純粋に論理的な法則から純粋に論理的な手段により導出されるという意味において，純粋に分析的であることを証明することであった。

デデキントの自然数の定義は，クラスの一般理論の一部分の内容を前提とする[32]。中心となる概念は，単純無限体系である (デデキントはクラスに対して体系という語を使う)。D をクラスとし，$\mathrm{s}(x)$ を D のすべての要素で定義された演算とし，b を D の要素とする。このとき，$\langle \mathrm{D}, \mathrm{s}, \mathrm{b} \rangle$ が**単純無限体系**であるとは，以下の条件が成り立つことである。

1. D の任意の要素 x に対し，$\mathrm{s}(x)$ は D の要素である。
2. D の任意の要素 x に対し，$\mathrm{b} \neq \mathrm{s}(x)$ である。
3. D の任意の要素 x と y に対し，$x \neq y$ であれば $\mathrm{s}(x) \neq \mathrm{s}(y)$ である。
4. D は，b を含み s について閉じているすべてのクラスの共通部分である[33]。

演算 s は後者関数の役割を果たし，要素 b は最初の要素の役割を果たすことが意図されている。条件 1,2,3 は，デデキント–ペアノ算術 (またはペアノ算術として知られている) における後者演算のための公理である。条件 4 は，デデキント–ペアノ算術における以下のような帰納法の公理と同値である。

> 任意の K に対し，b が K の要素であり，K の任意の要素 x に対し，$\mathrm{s}(x)$ が K の要素であれば，D の任意の要素 x は K の要素である[34]。

次にデデキントは，すべての単純無限体系が同型であることを証明した。$\langle \mathrm{D}_1, \mathrm{s}_1, \mathrm{b}_1 \rangle$ と $\langle \mathrm{D}_2, \mathrm{s}_2, \mathrm{b}_2 \rangle$ が単純無限体系であれば，D_1 と D_2 の間の 1 対 1 の関連づけ c が存在して，$\mathrm{c}(\mathrm{b}_1) = \mathrm{b}_2$ であり，D_1 の任意の要素 x, y に対し，$y = \mathrm{s}_1(x)$ であれば，$\mathrm{c}(y) = \mathrm{s}_2(\mathrm{c}(x))$ となる。これは，任意の 2 つの単純無限体系がまったく同じ構造をもつことを意味する[35]。この原理に基づいて，デデキントは，純粋に構造的な自然数の特徴づけを与えることができた。彼は以下のように述べた。

> 「ある変換 ϕ により順序づけられた単純無限体系 N を考え ($\langle \mathrm{N}, \phi, \mathrm{b} \rangle$)，その要素ごとの特徴を完全に無視し，単に要素の間の区別可能性と順序を定めている変換 ϕ により並べられている互いの関係だけに注目するとき，これらの要素は“自然数”とよばれる...」[36]

同じ段落の後のほうで，彼は，単純無限体系に対して定義した原理 (1–4) から導出可能な定理は，“数の科学”または“算術”を構成すると述べている。

自然数のこの定義を解釈する方法が 2 つある。1 つは，すべての単純無限体系 $\langle \mathrm{N}, \phi, \mathrm{b} \rangle$ の要素を自然数と解釈する方法である。N の要素の性質を無視し，要素どうしの区別と ϕ により導かれる順序の結果として得られる相互関係だけに注目すれば，その要素を自然数とよぶのは合理的である。上に引用された一節だけを考えるならば，これはもっとも適切な解釈である。しかし，10 章「単純無限体系のクラス」の中で，デデキントは自然数の体系となるただ一つの単純無限体系が存在することを明瞭に導いている。したがって，デデキントが無

矛盾な見解をもっていたとすれば，引用された一節は別の方法で理解されなければならない。これは，個々の特徴をもつ対象からなる単純無限体系 $\langle \mathrm{N}, \phi, \mathrm{b} \rangle$ が任意に与えられたとき，N の要素の特徴を無視し，要素どうしの区別と ϕ により導かれる関係だけに注目するならば，個々の要素が特徴をもたないような別の単純無限体系，すなわち，自然数の体系の認識に到達するということかもしれない。これが信じがたい解釈であると思われるといけないので，カントルが，線形に順序づけられたクラスの構造，つまり順序型を捉えた方法がこの解釈であることを指摘しておこう。彼は言った。「もし，要素 m の性質を抜き取り，先行に関する順序だけを保持すれば，我々は，M の順序型の理解に到達する。したがって，(M の) 順序型は，それ自身，順序づけられた集合体であり，その要素は，M の要素から抽象化によって得られ，M の対応する要素の間の先行順序と同じ順序をもつ。」[37]

デデキントはまた，自然数に対する加法と乗法を定義し，それらの定義の十分性を証明する。彼は，最初の要素を 0 ではなく 1 とするので，これらの定義は，デデキント–ペアノ算術の残りの公理であるよく知られた次の再帰等式の組とは完全に一致しない。

$$m + 0 = m, \quad m + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + n).$$

$$m \times 0 = 0, \quad m \times \mathrm{s}(n) = (m \times n) + m$$ [38].

ここで，変数は自然数に対するものであり，0 は基本となる要素である。デデキントは，自然数の算術のためにちょうど必要であり，それ以上は必要でないものを与えている。彼が基礎として使っている理論，すなわち彼のメタ理論は，クラスの一般理論である。しかしながら，彼のメタ理論は，彼が認識している以上のものを含んでいた。彼の自然数の定義は，単純無限体系の存在を仮定している。それは，無限クラスが何か一つでも存在すれば，存在することがわかる。デデキントは，無限クラスの存在を証明しようとするが，その議論は誤っている。彼は,「私の思考の対象になりうる」無限個のものが存在しうることを議論し，これをその主張の証明に使う。その対象は命題であり，ある単純な命題 p からはじまり，命題 x から「命題 x は私の思考の対象となりうる」という形の命題へ進む。一つの反論は，おそらくそれらの有限個だけが，実際にある人の思考の対象となりうるというものである。これは数学的に証明できない経験的事実である。しかし，それは重要な反論ではない。なぜなら，他の対象を

代わりに選ぶこともできるからである。例えば，文字 b の列の集まりで，文字がちょうど1回出現する列からはじめ，任意の列 x から，b の出現を x の語尾に添えて得られる列に進むようにする。重要な反論は，何らかの記述が与えられると，その記述が「思考の対象となりうるもの」または「b の有限列」または他の何かであれ，与えられた記述のすべてのものを含むクラスの存在をデデキントは前提としているということである。したがって，彼はそれとなくあるクラスの存在原理を仮定しているのである。

フレーゲの自然数の説明は非常に異なっている。彼の見解は，(些細な説明的問題を無視して) 数 n はちょうど n 個の要素をもつクラスのクラスであるというものであった[39]。よって，自然数は個数同値なクラスのクラスである。ただし，クラスが“個数同値”であるとは，それらの間に1対1の関連づけが存在するということである。そして，“Ψ たちの個数”とは，Ψ たちのクラスと個数同値なクラスのクラスとする。自然数0は,「『自分自身と等しくない対象』のクラス」と個数同値なクラスのクラスと定義され，フレーゲは注意深く実数の0と区別した。自然数1は,「『その唯一の要素が0である』クラス」と個数同値なクラスのクラスと定義される。フレーゲは，n までの自然数の列に属することを意味する述語を定義する。そして，n の後続数は，n までの自然数の列に属する対象のクラスと個数同値なクラスのクラスと定義される[40]。

フレーゲが定式化した数は，Ψ たちの個数とは何かという形の質問に対する答え，つまり基数であることは明らかである。この点において，フレーゲとデデキントは，同じ主題について説明を与えるものではなかった。有限基数全体は自然な順序のもとで一つの特別な単純無限体系を構成する。有限順序数全体も，“それらの”自然な順序のもとで別の単純無限体系を構成する。デデキントは，これらの順序づけられたクラスに共通の構造に対する定式化を行おうとしていた。それにもかかわらず，フレーゲとデデキントは，2人とも，数項 (数表示) を純粋な算術に現れる仕方で解釈していたと考えられる。また，2人とも，基礎としてクラスの理論を採用している。しかし，フレーゲは，クラスの理論の公理について非常に明示的であり，クラスが論理学の研究課題の一部である述語の外延にほかならないという根拠から，自分の理論は論理学とみなせると主張したのである。

結　論

19 世紀の終わりにむけて，明確さと厳密さの推進は，好結果に到達したように思われた。その中での収穫は，実数と自然数の正確な定義，超限クラスと超限数の最初の一般論，そして量化詞の論理の最初の定式化であった。これらは大きな収穫である。しかし，称賛がはじまるかはじまらないかのうちに，数体系のすべての厳密な定式化の根拠となったクラスの一般理論にパラドクスが発見された。勝利のさなかのこの挫折により，数学の基礎についての研究が数学者の主要な関心分野の一つになった。より深い考察が必要とされ，使命感をもった若い数学者は，根底まで到達しようと突き進んだ。したがって，数学の確かな基礎をみつけるための原動力は，ほとんどがその内面の問題から生じた。確信がどこかにみつけられるとすれば，それは数学の中であるという信念があったからである[41]。このように，数学的関心が哲学的なものと関係するようになった。どのようにして我々は数学の定理が信頼できると確信できるのであろうか。本書の残りの部分では，この難問に立ち向う試みについて考察する。次のいくつかの章で，クラスパラドクスを解説し，それらに対する初期の反応について検討する。

補遺：順序体としてのデデキント切断

$\mathbb{R}$ を切断のクラスとする。$\mathbb{R}$ 上で定義された 2 項演算 $+$, $\cdot$, $-$, $/$ と特別な要素 0^*, 1^*，そして $\mathbb{R}$ 上の 1 項演算 $-x$，および 0^* を除いた $\mathbb{R}$ で定義された x^{-1} を $\mathbb{R}$ に付加した構造を $\langle\mathbb{R}\rangle$ とする。

$\langle\mathbb{R}\rangle$ に対する順序の公理

$\mathbb{R}$ の任意の要素 a, b に対し，$0^* < a$ かつ $0^* < b$ であれば，$0^* < a + b$ かつ $0^* < a \cdot b$ である。

$\mathbb{R}$ の任意の要素 a に対し，$a < 0^*$, $a = 0^*$, $0^* < a$ のいずれか 1 つが成り立つ。

$0^* < 0^*$ ではない。

$\langle \mathbb{R} \rangle$ に対する体の公理

$\mathbb{R}$ の任意の要素 a, b, c に対し，

可換律：$a + b = b + a$ かつ $a \cdot b = b \cdot a$.

結合律：$(a + b) + c = a + (b + c)$ かつ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

単位元：$a + 0^* = a$ かつ $a \cdot 1^* = a$.

逆元：　$a + -a = 0^*$ かつ，　$a \neq 0^*$ ならば $a \cdot a^{-1} = 1^*$.

他：　　$0^* \neq 1^*$ かつ，　$a \cdot b = 0^*$ ならば $a = 0^*$ または $b = 0^*$.

第 II 部

クラスパラドクスと
初期の反応

1

クラスパラドクス

通常の語法において，パラドクスとは，明らかに不合理にもかかわらず，ある種の議論により支持される主張のことである。しかし，ここでは少し見方を変え，パラドクスとは，真であると思われる前提から，妥当であると思われる方法により偽であると思われる結論へ至る議論のことであるとする。パラドクスは3つの種類に分類される[1]。第一に，真であるが驚くべき結論をもつ健全な議論からなるパラドクスがある。例えば，長さ1の線分が含む点は一辺が長さ1の正方形が含む点と同数であるというカントルの議論である。次に，よく調べれば明らかな誤りがみつかるような健全でない議論によって偽である結論を導くパラドクスがある。例えば，$2=1$ を導くよく知られた議論がある[2]。最後に，健全ではないがよく調べても明らかな誤りがみつからない議論から偽である結論を導くパラドクスがある。これらのパラドクスは二律背反として知られており，多くの場合，結論は明らかに論理的に不可能なものである。これを解消するには，その議論で使われている一見自明な前提または推論パターンを排除するための道理を発見することが必要である。本書で扱うパラドクスはすべて3番目の分類に属する。19世紀における無限小解析の明確化と厳密化の運動に対する確信をくじく危機ももたらしたパラドクスは，クラスの基本理論から生じるものである。多くの変形はあるが，主要なクラスパラドクスは次の3つである。すなわち，ブラリ・フォルティのパラドクス，カントルのパラドクス，そしてラッセルのパラドクスである。

ブラリ・フォルティのパラドクス

ブラリ・フォルティのパラドクスは，1895年にカントルにより，そして1897年にブラリ・フォルティにより発見されたが，彼らはこれをパラドクスとみなしていなかった[3]。それはカントルの順序数の理論から自然に生ずる。正確な説明はある程度の予備知識が必要なので補遺にまわすが，基本的な考え方は単純である。順序数は狭義線形順序を形成するので，どの順序数も自分自身より前にあることはない。有限だけでなく超限の順序数も含めて，すべての順序数のクラスを考えると，それは一つの新しい順序数を形成し，クラスの中のすべての順序数の後にくることがわかる。しかし，定義によりそのクラスはすべての順序数のクラスであり，したがって，新しい順序数は自分自身の前になければならない。これはどの順序数も自分自身より前にあることはないという事実に矛盾する。

カントルのパラドクス

カントルのパラドクスは，1899年にカントルにより定式化された[4]。それは，カントルが何年か前に発見した単純な定理に依存しているので，まずその定理について述べよう[5]。B が C の**部分クラス**であるとは，B のすべての要素が C の要素であることとし，C のすべての部分クラスからなるクラスを ℙC と書く。クラスの**基数**とは，そのクラスがもっている要素の個数である。カントルの定理として知られる単純な定理は，任意のクラス C に対し，ℙC は C よりも大きい基数をもつというものである。そのパラドクスを示す。

U をすべてのクラスのクラスとする。

U のすべての部分クラスのクラス ℙU はクラスだけを要素にもつ。

したがって，ℙU のすべての要素は U の要素である。

それゆえ，ℙU は U よりも多くの要素を含んでいない。

しかし，カントルの定理から，ℙU は U よりも多くの要素を含むことが導かれる。

したがって，ℙU は U よりも多くの要素を含み，かつ，含まないことになる。

ラッセルのパラドクス

おそらく1899年か1900年に[6]，ツェルメロにより発見され，独立に1901年にラッセルにより発見されたものである。これは技術的な度合がもっとも少なく，もっとも基本的なクラスパラドクスである。我々は，与えられたクラスが，それ自身の要素かどうかを尋ねることができる。例えば，すべてのクラスのクラスがあれば，それはそれ自身の要素とならなければならない。しかし，青りんごのクラスは，どんなクラスもりんごではないので，それ自身の要素ではない。ラッセルのパラドクスは自分自身の要素ではないものすべてのクラスRを考えることにより生じる。

もし，Rがそれ自身の要素であれば，“それ自身の要素でない”というRの要素の条件を満足しなければならない。つまり，

(a) もしRがそれ自身の要素であれば，Rはそれ自身の要素でない。

もしそうでなければ，すなわち，Rがそれ自身の要素でなければ，Rの要素であるための条件を満足するので，Rはそれ自身の要素である。つまり，

(b) もしRがそれ自身の要素でなければ，Rはそれ自身の要素である。

これら(a)と(b)を合わせると，Rがそれ自身の要素であるとき，かつそのときに限り，これらRはそれ自身の要素でないという矛盾を得る。

後の議論のために，これをより形式的に述べておくことは有用であろう。ある名辞を含む真または偽を表している文，例えば,「4は平方数である」という文があるとする。その名辞の1つまたは複数の出現を自由変数に置き換えた結果を**開放文**という。例えば「xは平方数である」という文である。開放文は，物事が満たしたり満たさなかったりする条件を与える。つまり，4と9は「xは平方数である」という条件を満たすが，6と10は満たさない。ある条件を表している開放文$\mathrm{F}(x)$が与えられたとき，$\mathrm{F}(x)$を満たすもののクラスは，$\{x:\mathrm{F}(x)\}$という形で表現される。よって，$\{x:x$は平方数である$\}$は平方数のクラスである。慣習に従い,「要素である」という関係に$\in$を使い,「要素でない」という関係に$\notin$を使い,「そのとき，かつそのときに限り」に対し$\leftrightarrow$を使う。以上の約束のもとで，ラッセルのパラドクスは次のように述べられる。

(1) 任意の条件$\mathrm{F}(x)$と任意の対象yに対し，$\mathrm{F}(y)\leftrightarrow y\in\{x:\mathrm{F}(x)\}$で

ある。

したがって，特別な条件 $x \notin x$ と任意のクラス y に対し，

(2) $y \notin y \leftrightarrow y \in \{x : x \notin x\}$ となる。

y を特別なクラス $\{x : x \notin x\}$ とすると，

(3) $\{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\} \leftrightarrow \{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}$ となる。

しかし，これは不可能である。

ラッセルのパラドクスは，見た目以上にカントルのパラドクスに近い。ラッセルはこのパラドクスの着想をカントルの定理のカントルの証明から得ている[7]。両方の議論の基礎となるアイデアは対角化として知られており，論理の研究の要所要所で現れる。詳しくは，この章の補遺2を参照されたい。以下の3つの章では，いくらかの批判的な評価を加えながら，主要な人物のクラスパラドクスへの反応について述べる。種々の対立意見を知ることが，パラドクスを正しく捉え，後の発展を理解するための手助けとなるであろう。

補遺1：ブラリ・フォルティのパラドクス

このパラドクスを正しく述べるために，いくつかの定義と定理が必要となる。「整列に順序づけられる」と「順序数」の定義は，前章の順序数についての節で与えられている。他に必要となる定義は以下のものである。

関係 $<$ により整列に順序づけられたクラス C の任意の要素を x とするとき，$y < x$ となる y 全体のクラスは C の**切片**といわれる。

すると，以下の定理が成り立つ。

(a) すべての順序数のクラス Ω はある関係 $<$ により整列に順序づけられる。

(b) 整列に順序づけられたどのクラス C にも唯一の順序数が対応し，それを ord(C) と書く。

(c) 整列に順序づけられたクラスの各切片は整列に順序づけられる。

(d) 各順序数 α は，α より小さい順序数からなる (Ω の) 切片の順序数である。

(e) C が整列に順序づけられたクラスで， D が C の切片であれば，ord(D) $<$ ord(C) となる。

さて，パラドクスを示す。すべての順序数のクラス Ω は，$<$ により整列に順序づけられており，順序数 ord(Ω) をもつ ((a), (b) より)。ord(Ω) より小さい順

序数の (Ω の) 切片を S とすると，$\mathrm{ord}(\Omega) = \mathrm{ord}(\mathrm{S})$ となる ((b), (c), (d) より)。しかし，$\mathrm{ord}(\mathrm{S}) < \mathrm{ord}(\Omega)$ である ((e) より)。したがって，$\mathrm{ord}(\Omega) < \mathrm{ord}(\Omega)$ となる。しかし，$<$ は狭義線形順序であり，それゆえ非反射的なので，$\mathrm{ord}(\Omega) \not< \mathrm{ord}(\Omega)$ である。

補遺 2：カントルの対角線論法とラッセルのパラドクス

対角化は前章で導入されたが，ラッセルのパラドクスとの関連を示すためにもう一度繰り返す。カントルは，任意のクラス A に対し，その部分クラスのクラス $\mathbb{P}$A は A よりもつねに多くの要素をもつことを示した。A の各要素 x に対し，A の部分クラス $\{x\}$，すなわち，ただ一つの要素 x からなるクラスがあるので，少なくとも A の要素と同じ個数の A の部分クラスが存在することは容易にわかる。2 つの異なる基数については一方が他方より大きいので，定理を証明するためには，A の部分クラスの数が A の要素の数と等しくないこと示すだけでよい。すなわち，その要素とその部分クラスの間に 1 対 1 の関連づけが存在しないことを示すだけでよい。カントルの証明は，そのような関連づけが存在するという仮定による“背理法”である。

A を任意のクラスとし，その要素とその部分クラスの間に 1 対 1 の関連づけがあると仮定する。x が A の要素であるとき，f_x を x に関連づけられた A の部分クラスとする。ここで，次のような A の部分クラスを考えよう。

$$\mathrm{C} = \{x : x \in \mathrm{A}\ \&\ x \notin \mathrm{f}_x\}.$$

これは，A の要素で，その要素に関連づけられている部分クラスには属さないようなもののクラスである。C は A の部分クラスなので，仮定により，A のただ一つの要素が関連づけられている。この要素を z とする。このとき，$\mathrm{C} = \mathrm{f}_z$ である。

ここで，z は f_z の要素か否かを考えてみよう。
もし $z \in \mathrm{f}_z$ であれば，f_z は C なので，z は C の要素についての条件を満たさなければならず，$z \notin \mathrm{f}_z$ となる。
したがって，$z \in \mathrm{f}_z$ ならば $z \notin \mathrm{f}_z$ となる。

もし $z \notin \mathrm{f}_z$ であれば，z は A の要素であり，f_z の要素ではないので，z は C の要素であるための条件を満たし，したがって，C の要素，すなわち f_z の要素である。
したがって，$z \notin \mathrm{f}_z$ ならば $z \in \mathrm{f}_z$ となる。
これらを合わせると $z \in \mathrm{f}_z \leftrightarrow z \notin \mathrm{f}_z$ という矛盾が導かれる。それゆえ，そのような関連づけは存在しない。

ここで，A はすべてのもののクラスとし，その各要素はそれ自身に関連づけられているとすると，C は $\{x : x \notin x\}$ であり，それはラッセルのクラス R である。恒等写像が 1 対 1 の関連づけであることは明らかなので，ラッセルのパラドクスは，結論を除いてカントルの証明から導かれる。ラッセルのパラドクスの変形は，$\{x : x \notin x\}$ の代わりに，クラス $\mathrm{R}' = \{x : x$ は $x \notin x$ となるクラス$\}$ を使う。この場合，A をクラスのクラスとし，各クラスは自分自身に関連づけられているとする。このとき，$\mathrm{C} = \mathrm{R}'$ である。Russell (1906a) は，彼がカントルのパラドクスの単純化を通して，どのようにラッセルのパラドクスを得たのかを示している。

2 クラスパラドクスに対するカントルの取り組み

カントルは，クラスパラドクスを最初に発見した人物であったが，彼はそのパラドクスを矛盾したものであるとは考えなかった。その代わりに，ある種の全体性 (クラス) は数学的研究の対象として扱うことができないという，彼が何年も前に到達した考えを確認するためにそのパラドクスを使った。無限集合の理論，特に彼が作り出した無限順序数と基数の理論[1]を開発する過程において，当然ながら順序数の全体と基数の全体について考察し，それらは他の無限集合とは重要な違いをもつという見方に達した。有限と無限の伝統的区別は，前者が加法により増加させることができるのに対し，後者はできないというものであった。カントルは，この区別を疑った。有限と無限という単純な分割の代わりに，カントルの理論は，有限，超限，そして絶対無限という 3 つの分類を与えた。超限数は無限個の前者をもつという点において有限とは異なる。しかし，増加させることができるという点で有限数と似ている。他方，すべての順序数を並べた列は，それ以上増加させることができないので，絶対無限である。すなわち，順序数全体の列は新しい順序数を得るために延長できないが，超限順序数 α までの順序数の列は新しい順序数 $\alpha+1$ を得るために延長できる。同様の考えが基数にも適用される。カントルは，ブラリ・フォルティの議論が定式化される 1895 年のおよそ 7 年前[2]に，超限と絶対無限のこの区別を明確に述べている。さらにそれより前に彼は，絶対無限が把握できるものではなく，理解できる対象ではないと主張していた[3]。カントルは，この考え方を立証するためにブラリ・フォルティの議論を用いた。つまり，絶対無限である順序数全体を数学的知識の対象として扱うと，矛盾が生じることを示したのである。

絶対無限多数とは何か

カントルは，すべての有限でないクラスに適用できるように，超限と絶対無限の彼の区別を一般化した。デデキントへの有名な手紙において，彼は，**絶対無限多数** (AIM = *a*bsolutely *i*nfinite *m*ultiplicity) をそれ以外の有限または無限多数と区別し，後者を“集合”という言葉で定式化した。そして，彼は，パラドクスを導く誤りが絶対無限のクラスを集合として扱うことであると考えた。カントルは次のように区別を描き出した。

> 「一方で，ある多数に対し，その要素“全体”が集まっていると仮定することは矛盾を導き，したがって，その多数を単一として，1 つの完成したものとしてみることは不可能である。そのような多数を私は，“絶対無限”または“矛盾した多数”とよぶ....
>
> 他方では，ある多数の要素全体は矛盾なく，集まっているものとして考えることができ，したがって，その集まりを“1 つの”ものとすることは可能であり，私はそれを“無矛盾な多数”または“集合”とよぶ。」[4]

カントルの説明を詳細に調べてみよう。彼は，AIM であるための 3 つの異なる条件を提示しているが，それらが同値であるか否かはまったく明らかではない。多数が AIM であるとは，次を満たすことである。

1. それは“完成した”ものであるとは矛盾なく考えることができない。
2. その要素のすべてが“集まっている”という考えは矛盾している。
3. それは“1 つのもの”であるとは矛盾なく考えることができない。

最初の 2 つの判定条件は，多少不可解である。多数を完成したとか，しないとか考えるということはどういうことであろうか。クラスのクラスのような抽象的な対象のクラスが，建設中の建物のようにやがて現れると考える人はほとんどいないであろう。我々はそれらを完成しているとか完成していないとは考えない。さらに，クラスのクラスを完成したものと考えることにより説明されるものはどれもカントルのパラドクスに関係しない。クラスのクラスが完成していないということを受け入れたとしても，矛盾を導く推論には影響を受けない。同じことが，ブラリ・フォルティのパラドクスに対してもいえる。何が真相であるにせよ，その議論のどこにもすべての順序数のクラスが完成しているという仮定はない。

さらに，空間の点のクラスのような特別な場合を除いて，クラスの要素が，位置をもっているとは通常は考えない。順序数のような抽象的な対象は位置をもっていないので，我々はそれらを集まっているとも離れているとも考えない。さらに，パラドクスは該当するクラスの要素が集まっているという仮定を含まない。完成しているものと集まっているものというカントルの話は，単なる比喩的なものである。示唆に富んではいるが，これらの比喩はカントルの絶対無限の概念を明らかにしないし，クラスパラドクスの根幹における誤りも明らかにしない。

3番目の判定条件はどうであろうか。それによると，AIM とは“1つのもの”と考えられない多数である。もし，順序数のクラスのような多数が“1つのもの”でなければ，1つより“多い”のであろうか。これがカントルの考えていたことなら，彼はそれを明確にしていたにちがいない。彼は，すべての順序数のクラスのような AIM に対する表現は，曖昧であり，異なる文脈で異なる多数を表すというようなことをいいえただろう。しかし，このようなことは何もいわなかった。逆に，AIM が完成したものでないというカントルの考えは，AIM が1つのもの“でさえない”ことを示唆する。では，AIM に実体はなく，単なる創作で，すべての順序数のクラスは存在しないと彼はいったのであろうか。いや，いっていない。彼は，集合と AIM という2つの種類の多数があると考えただけでなく，基数のクラスと順序数のクラスに対する名称として特別な記号を使っており，それらについての書き方は彼がそれらは存在すると考えていたことを強く暗示する。したがって，AIM とは“1つのもの”であるとは矛盾なく考えることができない多数であるという言葉で，カントルが何を考えていたかはまったく不明瞭である。

絶対無限多数とそれ以外を区別するカントルの説明は比喩を含んでいるので，カントルは真の区別を考えていなかった，と疑っても当然である。パラドクスに対する解決の提案が，比喩を使って不明確な言葉でしか表せないような区別に基づくものであれば，我々は到底満足できない。この性質の厳密な特徴づけを得るまでは，その区別を用いる議論は矛盾を避けるための“場当り的な”策略と思われる。つまり，クラスの理論内で矛盾すると考えられる存在が発見されれば，そのクラスを理論の範囲を越えたところにある存在とみなすのである。

しかし，それが実質的にカントルの立場であったとしても，カントルが彼の理論を保持するために場当り的な策略で満足していたというのは的確ではないように思える。この問題について，3つの点からカントルを擁護することが可能である。第一に，カントルは絶対無限について肯定的な考えをもっていた。彼は，数え上げられない何かに対し，大文字の A で始まる絶対者 (Absolute) という神を表す語を使った[5]。後にカントルは，基数をもたないクラスが絶対無限クラスであるという考え方にうつっている。似たような考え方は，数学の他の場所でもみつけられる。距離空間における線分全体，すなわち1つまたは2つの端点をもつ直線全体を考えよう。2つの端点をもつものは長さをもつ。なぜなら，そのような線分の伸長は単位長さに対して明確な比をもつからである。しかし，1点しか端点をもたないものは長さをもたない。こう述べることにおいて場当り的なものは何もない。そうであれば，AIM を基数の大きさをもたないクラスとして特徴づけることは，なぜ場当り的とみなされるのであろうか。

第二に，彼はすべての順序数のクラスを AIM として，クラス C が絶対無限であるかどうかの判定に，以下の肯定的な数学的条件を使った。

> 「すべての順序数のクラスと C または C の部分クラスの間に1対1対応があるならば，クラス C は AIM である。」[6]

このことは，すべての順序数のクラスは AIM であるというカントルの信念と，他のいくつかの原理から実際に導かれる[7]。したがってカントルは，矛盾に出くわしたときにはいつでも，該当するクラスに絶対無限という称号をただ添えていたということは正しくない。カントルの見解では，整列に順序づけられたどのような集合も，無限集合でさえ順序数をもつが，どの AIM も順序数をもたない。順序数は数の一種であり，この見解は，パラドクスよりも7年早く，数え上げられないものとしての絶対無限というカントルの考えから自然に生じた。

第三に，カントル以後の集合論の発展により，集合の宇宙などの存在を仮定することで，カントルの区別に対して比喩的でない説明が与えられていることに注意するべきである。もし，基礎の公理が集合論の公理に含まれるならば，集合の宇宙は整列に順序づけられた累積的階層を形成する[8]。ここで，与えられた任意のクラス C に対し，C のすべての要素が属する段階はあるかと尋ねることができる。答えが「はい」であれば，C は集合である。そうでなければ，C は集合ではなく，絶対無限多数である。よって，多数 C が1つの完成したもの

であり，その要素が集まっているということは，C がある段階の部分クラスとなることである。

最後に，カントルの見解が**大きさの限界の理論**であるという一般的な説明によって生じうる不安の種を排除しておこう。この説明を正当化する理由はあるけれど，それは少々誤解を招くおそれのあるものである。正当とする理由は，すべての集合はある意味すべての AIM より小さいというものである。この関係は，厳密には次のように定義される。クラス x がクラス y より“小さい”とは，x と y の部分クラスの間に，1 対 1 の関連づけ (全単射) が存在し，y と x の部分クラスの間には存在しないことである。カントルの見解では，任意の集合は任意の AIM より小さいことになる。これは，大きさの限界の理論としてカントルの方法を説明する唯一の正当な理由である。しかし，この説明は誤解を招くおそれがある。なぜなら，カントルの見解において，集合は限界がなくすべての大きさをもつことができるが，絶対無限多数は大きさをもたないからである。対照的に，真の大きさの限界の理論は，ある基数 κ が存在して，κ より小さい濃度をもつクラスだけが集合であるとする。このような立場は，切断する濃度 κ を選ぶ原理的な手段がないということで批判の対象となる。実際，ラッセルは，ある論理学者がとったとされる方法を順序数の言葉で以下のように批判している[9]。

> 「この方法の大きな困難は，適当な順序数がどの程度大きいのかを示さないことである。ω がすでに不適当であるかもしれない。その場合，すべての真のクラス (すなわち，集合) は，有限になるであろう...または ω^2 が不適当かもしれないし，ω^ω や ω_1，あるいは直前をもたない他の順序数かもしれない。我々は，その列のどこから不適当になりはじめるのかを判定するために，さらなる公理を必要とする。」[10]

カントルの見解にあてはめてみると，この種の批判は公平ではない。実際，無関係であろう。カントルの方法では，順序数の列が不合理に切り変わる点はない。同様に，それ以上の濃度をもつとクラスが集合にならないような濃度は存在しない。カントルの見解において，切断する濃度は存在しないのである。しかしながら，大きさの限界というよび名は，カントルの見解が上記の引用文でも批判されているような気まぐれな視点をもっているという誤った考え方を助長しているかもしれない。

カントルの区別はクラスパラドクスを防ぐか

カントルの区別がクラスパラドクスを防ぐかどうかをみるために，専門用語を明確にしておきたい。クラスは，集合と AIM の両方を含めて使われることもあるが，制限的に集合を意味するために使われることもある。どちらの使用法にしても，我々が広義のクラスについて話しているか集合に制限して話しているかということにより，2 通りの論法を考慮しなければならない。

はじめに，ブラリ・フォルティのパラドクスを考える。クラスが集合を意味するとしよう。このとき，すべての順序数のクラスが存在するという仮定によって，議論は最初の障害に陥る。なぜなら，順序数の多数は絶対無限なので，すべての順序数の集合は存在しないからである。クラスを広義に読むと，カントルの見解に基づいてすべての順序数のクラスは存在する。しかし，整列に順序づけられたすべてのクラスは唯一の順序数をもつという前提は，クラスを広義に読むと真ではない。なぜなら，整列に順序づけられた AIM は順序数をもたないからである。したがって，カントルの区別はブラリ・フォルティのパラドクスを防ぐ。

次に，カントルのパラドクスを考える。もし，クラスが集合を意味するならば，すべての集合の集合は存在しないので，その議論は正しくない。クラスを制限なく読むとすると，問題はやや複雑になる。カントルは，AIM が数学的対象でないという。これは，AIM がクラスの要素になることができないという意味であろうか。 もし，AIM が要素になることができるならば，カントルのパラドクスにおける U をすべてのクラスのクラスとすることができる。このとき，U のすべての部分クラスは U に含まれるので，U の部分クラスのクラスから U の中への単射が存在する[11]。他方，各クラスをそれを含む単一要素クラスに対応させる U 上の写像 $x \mapsto \{x\}$ は，U から U のすべての部分クラスの中への単射である。それゆえ，シュレーダー–ベルンシュタインの定理により[12]，U の要素は，U の部分クラスと 1 対 1 に関連づけられる。しかし，これはカントルの定理により不可能である。したがって，AIM が要素になることができれば，パラドクスは生き残る。そこで，AIM が要素になることができないとしてみよう。AIM はクラスであるから，すべてのクラスのクラスは存在しないことになる。この場合，カントルのパラドクスを変形し，U をすべての集合のクラ

スとする。しかし，このとき U のすべての部分クラスのクラスは存在しない。なぜなら，それは U などの AIM を要素として含まなければならないからである[13]。カントルの定理を適用するためには，U のすべての部分クラスのクラスの存在が必要なので，パラドクスの議論は成立しない[14]。

最後に，ラッセルのパラドクスがある。もし，クラスが集合を意味するように制限して使われているならば，その前提は，集合に対する以下の内包原理が真であるときだけ成り立つ。

任意の条件 $\mathrm{F}(x)$ に対し，条件 $\mathrm{F}(x)$ を満たす要素全体だけからなる集合 $\{x : \mathrm{F}(x)\}$ が存在する。

しかし，カントルの方法によるとこれは正しくない。例えば，条件「x は順序数である」のように，対応する集合が存在しない条件がある。したがって，条件「x はそれ自身の要素ではない」を満たすものの集合は存在すると仮定できない。実際，カントルの前提から，自分自身の要素でないものの集合は存在しないことが証明できる[15]。

クラスが集合と AIM の両方に適用するように使われているとしよう。筆者の知るかぎり，カントルは，任意の条件に対し，それを満たすもの全体からなるクラスが存在するという考えを明示的に承認もしていないし，拒否もしていない。もし，それが受け入れられないならば，ラッセルのパラドクスの議論は防がれる。もし，それが受け入れられるならば，それ自身の要素ではないもののクラスが存在する。より正確にいうと，あるクラス R があって，任意の対象 y に対し，

$$y \notin y \leftrightarrow y \in \mathrm{R}$$

となる。議論の最後の段階は，これを一般化して，R へ適用する。すなわち，任意の対象 y に対してそれが真であるならば，特に R に対して真である。カントルの原理によると R は AIM でなければならなく[16]，カントルによると AIM は数学的対象として扱うべきではない。R への一般化の適用は R を数学的対象として扱うことと同等なので，最後の段階は受け入れられない。

結　論

カントルの明確な見解は，多少の修正を加えることで，クラスパラドクスを十分防げることが明らかになった。したがって，カントルの見解において，これらのパラドクスはどんな矛盾も示さないと結論づけてもよいであろう。さらに，集合についての議論として分析するならば，カントルの見解のもとで，各パラドクスは明らかな誤謬を含んでいる。したがって，カントルの集合の理論は，パラドクスを免れている。

しかしながら，カントルはパラドクスを“解決”しなかった。パラドクスを解決することは，パラドクスの議論を防ぐ1つまたは複数の原理に対して，パラドクスとは独立に，説得力のある理由をもっていることが必要である。また，誤謬を見落とす原因の解明も必要である。カントルは，どのクラスが絶対無限であるかを判断する原理をもっていなかった。彼は，単にすべての順序数のクラスは絶対無限であると仮定し，それを他のクラスが絶対無限であることを示すための手段として使っただけである。順序数のクラスが絶対無限であるとしたことに対し，カントルが提示できた唯一の確固たる根拠は，それを集合とすることにより，ブラリ・フォルティの矛盾が生じるということであった。一般に，あれこれのクラスが集合でないという彼の主張には，パラドクスとは独立した説得力のある理由は与えられなかった。1906年，すべての順序数のクラスと関連して，数学者のヘッセンベルグにより以下の点が指摘された。

> 「いまだ集合の概念に関して奥深い分析がされていないので... それゆえ，すべての順序数を1つの集合として集めることが認められないことになっているが，我々はこれを集合と順序数の概念から“証明”できない。我々は単に矛盾しているという事実に満足しなければならない。」[17]

集合に関するカントルの理解は，パラドクスの解決策を与えるのに必要とされるものを欠いていた。このような状況で，人々は超限集合の理論が無矛盾であるという確信をもてなかったのは無理もない。19世紀後期の基礎論研究の核であったこの理論に対する不信感は，数学の基礎に影を投げかけることになった[18]。

3

フレーゲの論理主義とラッセルのパラドクスに対するフレーゲの回答

フレーゲの論理主義

カントによると，幾何学的な事実に関する我々の知識は空間的直観に基づく。フレーゲはそれに賛成した。カントはまた，算術的知識も何らかの直観に基づくはずであると考えたが，フレーゲは異義を唱えた。フレーゲは，算術的事実が論理的事実であり，純粋に論理的な手段により理解されうると考えたのである。フレーゲの目標はこの考え方を確立することであった。彼の基礎的な著作である『算術の基本法則』の最初の節で，彼は課題を次のように述べた。

> 「拙著『算術の基礎』(1884) では，算術は論理の一部門であり，経験や直観から何ものも証明の基礎に取り入れる必要がないことを明らかにしようと試みた。この本では，論理的な手段だけによってもっとも単純な数の法則を導出することにより，これを確認しよう。」[1]

なぜフレーゲは，その主張を実証する前に，算術が論理の一部門であると考えたのであろうか。一つの理由は，幾何学と算術のある違いであった。

> 「概念的な思索のために，我々はいつでも幾何学的公理のいくつかに反することを仮定できる。仮定と我々の直観が矛盾するにもかかわらず，推論を進めても自己矛盾に陥ることがない。これが可能であるという事実は，幾何学的公理が互いに，そして論理の原始的な法則からも独立であり，その結果 総合的であることを示している。数の科学に関する基礎的な命題についても同じことがいえるであろうか。ここでは，それらのどれか 1 つを否定しようとすれば，全体の混乱が起きる。考えることさえも不可能に思われる。」[2]

その違いは厳密には何であろうか。ユークリッドの平行線公準の否定は自己矛盾ではなく，他のユークリッドの公理と矛盾しない。これが本当に違いを明らかにするであろうか。デデキント–ペアノ算術の帰納法公理の否定も自己矛盾ではなく，他のデデキント–ペアノ算術の公理と矛盾しない。フレーゲが考えたと思われる違いはこうである。幾何学的対象と関係についての我々の概念は，直線が平行線の公準に従わない (直観に反した) 状況を考えることを我々に許すが，その一方で有限基数の概念は，有限基数がデデキント–ペアノ算術の帰納法公理または他の公理に従わない状況を考えることを我々に許さない。しかし，(有限基数についての記述と解釈した際の) 算術の公理についてのこのような事実は，それらを論理的事実とすることに十分ではない。なぜなら，いくつかの幾何学的公理の否定は (幾何学的直線と点についての記述として) 考えられないが，そのような幾何学的公理の集まりは論理的事実の本体を構成しないからである [3]。

じつは，フレーゲは，基数の算術が論理の問題であると考えることに対し，算術の定理の包括的適用可能性という他の理由をもっていた。フレーゲは続けた。

> 「事実上，思考の対象となりうるものはすべて実際に数えられる。現実と同様に理想，事物と同様に概念，空間的なものと同様に時間的なもの，物体と同様に事象，定理と同様に方法，数それ自身さえ順に数えられる。ある程度鮮明な範囲と論理的な完全性を除いては，そこには何も要求されていない。この事実から，算術を構成している基本的原理は，幾何学の公理が空間的なものの公理を表しているように，それらが表す特性をもつ狭い領域に関係づけることはできないと推論される。むしろ，それらの基本的原理は，考えられるすべてのものに拡張されなければならない。そして，このようにもっとも一般性をもっている命題は，当然なこととして論理に帰する。」[4]

ある理論の普遍的な適用可能性は，それが論理の一部であるという根拠として十分かどうかわからない。しかし，フレーゲの条件を両方合わせると，有限基数の算術が論理の一部門であると考える彼の立場がより強まる。つまり，その法則はまともに否定できず，それはすべてに適用される。

しかしながら，フレーゲは，算術が論理であるという彼の考え方に対して，これが決定的な根拠ではないことに十分気づいていた。有限基数の法則が純粋に論理的な法則と定義から純粋に論理的な推論により導出されることを彼は示す必要があった。しかし，論理とは何であろうか。この時点でフレーゲは，論理

の明確な定義が存在しないと書いていた。論理に関する現在の我々の考え方は，フレーゲたちの数学基礎論に関する研究から何年も後に現れることになる。フレーゲは，論理が概念の外延の理論である，または少なくともそれを含むと根拠なく考えていたわけではない。概念はまさに条件であり，例えば「x は素数である」という概念の外延は，その条件を満たすもののクラス，つまり素数のクラスである。フレーゲはいう。「論理学者は，概念の外延について語り出して以来ずいぶん経ち，数学者は，集合，クラス，多様体という用語をずっと使っている... 数学者が集合 (等) とよぶものは，概念の外延以外の何ものでもないと我々が思うのは当然であろう...」[5]　それは単に用語法の問題ではない。クラスについての多くの記述が，論理的事実と同等であると思われる。F を満たすもののクラスは G を満たすもののクラスの部分クラスで，G を満たすもののクラスは H を満たすもののクラスの部分クラスであれば，F を満たすもののクラスは H を満たすもののクラスの部分クラスであるという法則を考えよう。それは，F を満たすすべてのものは G を満たし，G を満たすすべてのものは H を満たすならば，F を満たすすべてのものは H を満たすという論理的事実の一つの表現ではないであろうか。

フレーゲにとって概念の外延についての本質的な事実は，2 つの概念の外延が同じであることは，一方の概念に該当するものはすべて他方の概念に該当するとき，かつそのときに限るということである[6]。したがって，例えば，

> 任意の対象 x に対し，$x = \pm\sqrt{4}$ であることは，$3(x^2) = 12$ であるとき，かつそのときに限る

ので，我々は次のように主張できる。

$$\{x : x = \pm\sqrt{4}\} = \{x : 3(x^2) = 12\}.$$ [7]

フレーゲは，概念の外延が同一であるという記述に到達するこの方法を論理のステップと考えた。「この可能性は，論理の法則とみなされなければならない。すなわち，論説が概念の外延について行われているときは，明示的でないとしても，つねに使われる法則である。論理のライプニッツ–ブール計算全体は，それに基礎をおいている。」[8]　フレーゲはまた，(同一から一般的な同値への) 逆のステップも論理のステップとみなし，彼の基本法則 V の中に 2 つを統合させた。

$$\{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{G}(x)\} \leftrightarrow \text{任意の } x \text{ に対し}, \mathrm{F}(x) \leftrightarrow \mathrm{G}(x).$$ [9]

まとめると，フレーゲは論理を概念の外延の一般的な理論である (またはそれを含む) として扱い，概念の外延についての法則と略記的な定義から算術が論理的に導出できると考えていたといえる。これに対する彼の根拠は，算術の法則が否定をまともに考えられず，一般的な適用可能性をもつという論理的法則の特徴をもっているということであった。

フレーゲのプログラム

フレーゲは，1884 年の哲学書の最後の節において非形式的な説明によって，論理主義者としての算術の見方の正当性をある程度立証していた。しかし，彼は，疑う余地のない方法で自らの立場を確立したいと考えていた。

> 「確かに，算術が単により高度に発展した論理であるという発言はよくなされる。しかし，証明の中に，認知された論理法則によらず，直観のようなものに基づく過程が出現しているかぎり，この発言には疑いが残る。これらの過程が論理的に単純なステップに分割されるときにだけ，我々は問題の根幹が論理だけであると説得されうる。」[10]

フレーゲの意図していた方法は，論理的法則と定義により，実際に証明を行って，算術の法則の導出可能性を示すことであった。引用した文章は，彼の目的を果たすためには，どのように証明が実行されるべきかを示している。証明のすべてのステップは，論理的に単純でなければならない。さらに，フレーゲは，証明されていない前提，すなわち公理と推論法則は，事前に述べられなければならないと主張する [11]。しかし，これでも十分ではない。証明として提示されたすべてのものに対し，それが本当に証明であるかどうか，すなわち命題の列で，それぞれの命題が公理かその列の前の命題から規則を適用することにより従うかどうかが明らかでなければならない。これらの厳密な条件を満たすことを明らかにするために，フレーゲは論理的に完全な言語，すなわち，(i) その言語で表現できる各命題の論理的特徴がそれを表現するために使われる文の形から明らかであり，(ii) 各表現の解釈が明らかかつ正確で，暗黙の仮定をもち込むことができないような言語を必要とした [12]。したがって，フレーゲのプログラムには 3 つの課題があった。

1. 算術の用語の定義を含む論理的に完全な言語 L を提示すること。
2. 明らかに論理的に真であり，公理として使われる L の文を提示すること。そして，明らかに論理的に妥当な L の推論の規則を提示すること。
3. これらの公理からこれらの規則により算術の法則の導出を明示的に完全に行うこと。

これは過剰に衒(げん)学的なプログラムという印象を与えるかもしれない。しかし，フレーゲの目的は，算術の法則が単なる事実ではなく，論理的事実であることを疑いなく明らかにすることであるから，このプログラムは過剰なものではない。算術の各法則の明示的な証明が法則の認識論的性質を判断するための基礎を与えるであろう，とフレーゲは言った。そして，数学の典型的な証明と彼の証明を比較して，次のように書いた。

> 「一般的に，人々は，証明におけるすべての段階が明らかに正しければ満足する。証明される命題が真であることを説明してほしいと思うだけならばこれでよい。しかし，明らかであることに内なる眼を開くことが問題ならば，この手続きは十分ではない。我々は中間のステップのすべてを書き抑えておかなければならず，十分な意識の光がそれらに当てられなければならない。」[13]

フレーゲの体系における矛盾

フレーゲのプログラムの最初の部分は，パラドクスが発見される前に実行され，1893 年に出版された。1902 年，この研究の第 2 巻が発行される直前に，フレーゲは，彼の体系から導かれる矛盾を指摘した手紙をラッセルから受け取った。フレーゲは次のように答えた。「研究者にとって研究書が完成した直後に，構築した理論の土台を揺るがされること以上に不幸なことはない。」

ラッセルのパラドクスに対するフレーゲの反応について調べる前に，それがフレーゲの体系にどのように現れるか説明しておくことは有用であろう。ラッセルのパラドクスの説明の際に導入された記号に加えて，以下のものを使う。

$\exists x$　「ある x に対して」の省略として，

$\forall x$　「すべての x に対して」の省略として，

ただし，x は対象の変数である。x の代わりに，y や z でも同じである。また，概念 (または述語) 変数には，x の代わりに，F，G，H を使う。使われる法則と

定義は，フレーゲの基本法則 V と所属関係の定義である。この基本法則 V を 2 つに分けておくと便利である。

$$\text{(Va)} \quad \forall x[\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \mathrm{G}(x)] \rightarrow \{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{G}(x)\}.$$

$$\text{(Vb)} \quad \{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{G}(x)\} \rightarrow \forall x[\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \mathrm{G}(x)].$$

所属関係は，本質的に次のように定義される[14]。

$$x \in y \leftrightarrow \exists \mathrm{H}[y = \{z : \mathrm{H}(z)\} \mathbin{\&} \mathrm{H}(x)].$$

フレーゲは，論理的に完全な言語における任意の述語 $\mathrm{F}(x)$ に対し，その外延であるクラス $\{x : \mathrm{F}(x)\}$ が存在すると仮定した。実際，これは (Va) で暗黙に仮定されている[15]。したがって，$\{x : x \notin x\}$ が存在すると考えられる。ラッセルのパラドクスの議論は，論理式

$$\mathrm{F}(y) \leftrightarrow y \in \{x : \mathrm{F}(x)\}$$

さえ導けば，その体系において再生できる。フレーゲの (Vb) と所属関係の定義からこの一般的な論理式を導出することは本章の補遺にまわす。上式は任意の述語 $\mathrm{F}(z)$ に対して成り立つので，特に，$z \notin z$ に対して成り立つ。したがって，次の事実が成り立つ。

$$y \notin y \leftrightarrow y \in \{x : x \notin x\}.$$

これはすべての対象 y に対して成り立ち，フレーゲの考えにおいてクラスは対象なので，次のような矛盾を得る[16]。

$$\{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\} \leftrightarrow \{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}.$$

所属はフレーゲの体系では定義された関係なので，その体系においては所属の記号を使わなくても矛盾を導けることが予想できる。これは正しい。否定記号 $\neg$ を使い，R を次のように定義する。

$$\mathrm{R}(x) \leftrightarrow \exists \mathrm{H}[x = \{z : \mathrm{H}(z)\} \mathbin{\&} \neg \mathrm{H}(x)].$$

このとき，フレーゲの体系において，以下の矛盾が導かれる[17]。

$$\neg \mathrm{R}(\{x : \mathrm{R}(x)\}) \leftrightarrow \mathrm{R}(\{x : \mathrm{R}(x)\}).$$

その導出はまた，(Vb) と，任意の述語に対しその述語の外延であるクラスが存

在することと，任意のクラスは対象であるという仮定を使う。その議論は明らかにラッセルのパラドクスの一つの変形である。

フレーゲの回答

フレーゲは，ちょうど彼の基礎論研究の第2巻『基本法則』の印刷中に，ラッセルにより矛盾について警告された。彼はその巻の補遺に回答を与えた。そこで，彼はその問題の原因となりそうなものをいくつかあげ，ざっと概観した後，出版した議論に対して，少なくとも一見した限りはもっとも少ない修正ですむと思われるものを原因と特定している。

1番目の分析は，$\{x : x \notin x\}$ のようなクラスが真の対象ではなく，したがって，それらのクラスに対する項は，対象変数に代入できないであろうというものである。この分析に基づくと，項 $\{x : x \notin x\}$ は，

$$y \notin y \leftrightarrow y \in \{x : x \notin x\}$$

の対象変数 y に代入できない。それゆえ，議論の最後の段階は妥当ではない。

フレーゲは2つの理由からこの分析を拒否した。第一の理由として，彼は適切な対象と不適切な対象を区別するだけでなく，不適切な対象に適用できる述語とそうでない述語を区別し，そして，それら2種類の述語の外延を区別し，さらに，2種類の外延に適用できる述語も区別する等々の必要があるだろうと考えた。その結果は型の多様性になり，これは不可能ではないとしても手に負えないであろう。どの述語がどの対象に適用可能かを決定する一般的な規則を提示することは，非常な困難である。不適切な対象を拒否するこの理由は，決定的なものではない。体系の言語のどの述語も不適切な対象に適用できないと定め，それにより多くの型の必要性を避けることもできるし，型の体系を受け入れ，非常な複雑さを甘んじることもできる。しかし，不適切な対象の拒否に対するフレーゲの第二の理由はより強い。彼は，「不適切な対象の正当性を認めることは疑問である」と述べた。これは，絶対無限多数と集合のカントルの区別について一般に抱かれる疑念と同じである。適切な対象として扱うことから矛盾が生じることを発見する以前には，クラスが不適切かどうかを判定する方法が存在しないように思われ，適切な対象と不適切な対象の区別に対して独立の

原理がないことは，その区別が現実のものではないことを示唆する。

2番目の分析は，クラスのようなものは存在せず，クラスの項は意味のない表現で,「平均的な稼ぎ手」のような見せかけの名称であるということである。もしかしたら，誰も x ポンドの週間平均賃金をちょうど稼ぐ人はいないかもしれない。その場合，どの稼ぎ手も x ポンドより多いまたは少ない週間賃金を稼ぐ。しかし，平均的な稼ぎ手が x ポンドより多いまたは少ない週間賃金を稼ぐことを確実に結論することはできない。“普遍例化”の規則は，指示をもたない項にはうまく適用できない。“存在汎化”の規則も同じく適用できない[18]。この場合，ラッセルのパラドクスの最後の段階において変数にクラスの項を代入することが妥当でない。なぜなら，それは指示をもたない項についての普遍例化になるからである。フレーゲは，パラドクスによりよび起こされた唯名論の思想をもっていなかった。クラスは，フレーゲの考えの中心，つまり彼の論理学的見地の中心である。それゆえ，算術に対する彼の論理主義プログラムの中心となるものであった。それが「クラスでない」という選択を拒否する彼の理由であった。より実用主義的にいうと，フレーゲの体系において，有限基数 n は，ちょうど n 個の要素をもつクラスのクラスである。それゆえ，彼の体系において，数に対する項はクラスの項である。したがって，もしクラスの項がすべて指示のない表現ならば，数の項もまた指示のない項になるであろう。それは一般的な算術の論理式と具体的な数式の間のつながりを破壊する。基数がクラスであるという考え方も，もちろん疑わしい。しかし，それはフレーゲの方法の中心となるものであったので，彼にとってそれを適当に残しておくことは当然であった。さらに，クラスが存在しないとすると，他の数学的対象も脅かされる。それらが構造をもつクラスでないとすれば，数列，束，半群とはいったい何であろうか。

フレーゲが言及する3番目の可能性は，すべての概念が外延をもつわけではないということである。しかし，彼はこの選択を本格的に考慮していない。述語 $x \notin x$ により表される概念が外延をもたなければ，明らかにパラドクスは防がれる。この方法を拒否する一つの理由は，どの概念が外延をもち，どれがもたないかを決定する原理の欠除である。フレーゲは問う。「概念の外延，クラスについて話すことはつねに許されるであろうか。 そして，許されないならば，どのようにして例外的なものを見分けるのであろうか。」[19]

フレーゲが特定した原因は，彼の体系における矛盾の導出に対する注意深い分析によっていた。どちらの導出 (1 つは所属を使い，もう 1 つは使わない) も，基本法則 V を前提としている。(上で考慮した暗黙の仮定とは対照的に) 導出の明示的な仮定の中で，基本法則 V はもっとも信頼できないように思われる。パラドクスへの回答において，フレーゲは次のように言っている。

> 「それは私の基本法則 V の問題である。他のものがもっており，論理の法則として当然要求される自明さがそれには欠けていることを私は自身に隠しておらず，実際，この不十分な点を第 1 巻の導入で指摘した。」[20]

導出の中で法則 V が作用している部分は，(Vb) の部分である。

$$\text{(Vb)}\quad \{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{G}(x)\} \rightarrow \forall x[\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \mathrm{G}(x)].$$

しかしながら，(Vb) が問題となるのは，任意の概念 F に対し対応するクラス，つまり，F の外延が存在するという仮定と合わせたときにだけである。(Vb) でなく，この存在に関する信念が根本的誤りであると筆者はみている。なぜなら，F を満たすもののクラスが G を満たすもののクラスと同一であれば，F と G を満たすものはちょうど同じものであるということは，まったく自明にみえるからである。明らかに，矛盾を導く導出における (Vb) の出現は，それを疑うための“一つの”理由になる。しかし，(Vb) を疑う独立の理由なしに，上に議論した暗黙の仮定ではなく，(Vb) に根本的な誤りがあると信じてしまうべきではない。

フレーゲは彼の体系をできる限り多く残すために，(Vb) を以下のものに置き換えることを提案した。もし，概念の組が同じ外延をもつならば，その可能な外延を除いては，一方の概念に分類されるものは他方の概念に分類される。

$$\{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{G}(x)\} \rightarrow \forall y[[y \neq \{x : \mathrm{F}(x)\}] \rightarrow (\mathrm{F}(y) \leftrightarrow \mathrm{G}(y))].$$

この変更はパラドクスの導出を防ぐ。しかし，これは，フレーゲも大きい信頼をおかず，発行の締め切りの圧力の中でなされた“場当り的な”手段であった[21]。フレーゲは，それによって彼の証明の多くが変更を必要とすることに気づいていた。彼は，必要とされる変更が可能であることに確信を表明していたが，それは確認される必要があることに注意していた。しかし，後にそれはうまくいかないことがわかった。重要な定理のいくつかが，以前の導出の修正では証明

できないのである。さらに悪いことに，基本法則 V を変更した新しい体系は，依然として矛盾を導く[22]。フレーゲのプログラムは打ち砕かれた。これが，後年フレーゲが自らに下した判決となった。彼は，カントの考え方に立ち帰り，外延を論じることは幻覚であって，算術は論理だけに基づかないと信じるようになった[23]。

補遺：フレーゲの前提からの内包原理の導出

任意の述語 F に対し，F の外延であるクラス $\{x : \mathrm{F}(x)\}$ が存在することをフレーゲ的に仮定し，フレーゲの前提から，

$$\mathrm{F}(y) \leftrightarrow y \in \{x : \mathrm{F}(x)\}$$

が従うことを示せば十分である。フレーゲの体系における議論の完全な再現は非常に長く退屈なものになり，詳細を考えることは本質的な考え方を見失わせる (詳細は Frege 1893 の §§ 54, 55 を参照せよ)。したがって，現代的な記法と単純な 2 階論理を使って，(Resnik 1980 に従って) 概要を与える。その議論は，所属関係のフレーゲの定義とフレーゲの基本法則 V の一部の 2 つの前提を使う。

$$\text{(Df)} \quad x \in y \leftrightarrow \exists \mathrm{H}[y = \{z : \mathrm{H}(z)\} \ \&\ \mathrm{H}(x)],$$
$$\text{(Vb)} \quad \{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{G}(x)\} \to \forall x[\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \mathrm{G}(x)].$$

左辺から右辺への関係を示す議論は次のようになる。

(1)	$\mathrm{F}(y)$	[仮定]
(2)	$\{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{F}(x)\}$	[= の論理]
(3)	$\{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{F}(x)\} \ \&\ \mathrm{F}(y)$	[(1) と (2) から]
(4)	$\exists \mathrm{H}[\{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{H}(x)\} \ \&\ \mathrm{H}(y)]$	[存在汎化により (3) から]
(5)	$y \in \{x : \mathrm{F}(x)\}$	[(4) と (Df) から]
(6)	$\mathrm{F}(y) \to y \in \{x : \mathrm{F}(x)\}$	[仮定 (1) をおとして (5) から]

逆の関係を示す議論は次のようになる。

(7)	$y \in \{x : \mathrm{F}(x)\}$	[仮定]
(8)	$\exists \mathrm{H}[\{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{H}(x)\} \ \& \ \mathrm{H}(y)]$	[(7) と (Df) から]
(9)	$\exists \mathrm{H}[\forall x[\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \mathrm{H}(x)] \ \& \ \mathrm{H}(y)]$	[(8) と (Vb) から]
(10)	$\mathrm{F}(y)$	[(9) から]
(11)	$y \in \{x : \mathrm{F}(x)\} \rightarrow \mathrm{F}(y)$	[仮定 (7) をおとして (10) から]

求める論理式は (6) と (11) から従う。

4

クラスパラドクスに対する回答としての型理論

『プリンキピア・マテマティカ』の学説が固まる以前に，ラッセルはパラドクスに対する多種の回答を検討した。その中で次第に好ましく思うようになった回答は，彼が『プリンキピア・マテマティカ』の中で述べた論理型の考えであった。ラッセルの目的はフレーゲのそれと非常に類似したものであった。フレーゲの目的は，算術がクラスの一般理論を含むような論理の高度に発達した形態であることを示すものであった。ラッセルは数学全体に対して同じことを示そうと試みた。クラスパラドクスに直面して，論理主義者はとれる策をほとんどもっていなかった。もし，クラスの理論を論理とみなせるならば，クラスは特別な数学的対象になることはできない。そうでなければ，その理論は主題中立という論理の特徴をもたないであろう。クラスは概念の外延[1] 以外の何ものでもなく，クラスの理論はそれらのすべてに適用されなければならない。このことは，パラドクスを産み出すクラス (例えば，すべての順序数のクラス，クラス全体，ラッセルのクラス) が，一般理論の範囲に入らないとするカントルの立場に反する。さらに，所属関係の記述 $y \in \{x : \mathrm{F}(x)\}$ は，論理的にいうと単純な主語–述語の記述 $\mathrm{F}(y)$ と同値でなければならず，そうでなければ，クラスの所属関係の記述は依然として特別な対象についてのものであり，それゆえ，主題中立という論理的真理の特徴をもたないことになる。このことは，$y \in \{x : \mathrm{F}(x)\} \leftrightarrow \mathrm{F}(y)$ の同値性を捨てるフレーゲのような立場を排除する。次に，このことは，例えば $x \notin x$ のようないくつかの概念が外延をもたないという立場を排除する[2]。結果として，論理主義者は，クラスの論理的な理論が概念の外延の理論であることを受け入れ，次の内包原理を受け入れることを強いられるのである。

任意の概念 $\mathrm{F}(x)$ に対し，あるクラス $\{x : \mathrm{F}(x)\}$ が存在して，任意の対象 y に対し，y が $\{x : \mathrm{F}(x)\}$ の要素となるのは，$\mathrm{F}(y)$ のとき，かつそのときに限る。

論理主義者の視点からの型理論の長所は，これらの制約のもとで，クラスパラドクスに対する回答が与えられるということである。

論 理 型

基本的な考え方を単純な例で説明しよう。「属する」は「要素である」を意味するとして，以下の文を考えよう。

(a) **Д** はキリル文字体系に属する。
(b) キリル文字体系はグラゴール文字体系に属する。
(c) キリル文字体系はスラブ文字体系のクラスに属する。

もし，あなたが言及されている文字体系について何も知らないとすると，1 番目と 3 番目の文は真であるかもしれないが，2 番目の文は真ではありえないということができるであろう。なぜなら，文字体系は，個々の文字ではなく文字のクラスであり，したがって，1 つの文字体系が他の文字体系に (またはそれ自身にも) 属することはできない。これで文 (b) は否定される。というのは，文 (b) は，他の文字体系に，ある文字体系が属していることを主張しているからである。文 (a) は，ある文字が，ある文字体系に属していることを主張しているから除外されない。文 (c) は，ある文字体系が，ある文字体系のクラスに属していることを主張しているから除外されない。言及されている文字体系を知ることなく，(b) に欠点があることを知ることができるので，その欠点はある意味その形式に含まれなければならない。しかし，(b) に構文の間違いはないので，それは英語の文法の問題ではない *)。ラッセルはそれを論理の形式の問題と考えた。特別な訓練なしに，我々は個体と個体のクラス，そして個体のクラスのクラスの差に気づき，それらの間の所属関係の制限に気づく。個体は論理型のもっとも低いものとし，個体のクラスはその次に低い型のものであるとし，個

*) 訳注：原文は英語で書かれており，(b) の文は文法的には誤りがないため，このような指摘がなされている。

体のクラスのクラスはさらにその次のものであるとしよう。このとき，ある型のものは１つ上の型をもつものの要素になりうるが，それは等しいか，より低い型のものの要素になることはできないことがわかる。論理型のこの法則は文(b)において破られており，我々は(b)が正しくないと考えることにおいてその間違いを判断している。ラッセルの見地では，論理型の法則は，論理的に完全な言語において構文に組み込まれることにより顧慮され，論理型の欠点をもつ文は不適格文として排除する。

型の学説によると，各対象は，ちょうど１つの論理型をもつ。型０の対象は，個体のすべてであり，それ以外の何ものでもない。個体のクラスは型１をもち，それらのクラスのクラスは型２をもち，一般に，型 n の対象のクラスは，型 $n+1$ をもつ。型 n の対象は型 $n+1$ のクラスの要素になりうるが，他の型のクラスの要素にはならないということが，この理論の重要な部分である。よって，個体とクラスの全体は自然数により番号づけられた互いに排他的な階層の上下関係に分割される。それが型の学説の形而上学的な枠組みである。

型の文法

ラッセルは，フレーゲと同じように論理主義を実現しようとした。それは論理的公理体系を提示し，確立された数学がその体系において導出できることを示すことによってなされるが，単に，公理，規則，定義を定式化し，証明を示すということではなかった。これより前に，論理的に完全な言語を規定することがあった。ラッセルが巧妙にクラスパラドクスからの回避策をみつけたのはここである。論理的に完全な言語が型の文法を取り入れることにより，彼は内包原理をうまく保持した。それがどのように機能するかをみよう。

論理型の法則が言語の文法においてどのように扱われるかをみるには，いくつかの準備が必要である。条件は開放文により表現される。すなわち,「x は回転する」というように，文から１つまたは複数の名辞の出現を除いた結果として表現される。開放文が２つ以上の空所をもつとき，それらの空所は，開放文が唯一の条件を表現するために，印が付けられなければならない。例えば,「x は y を称賛する」と「x は x を称賛する」は明らかに異なる。これからは，論理学者の習慣に従い，開放文を**述語**とよび，述語中の空所に印を付けている文

字を**変数**とよぶ。n 個の異なる変数をもつ述語は，n 変数述語とよばれる。よって，「x は回転する」と「x は x を称賛する」は 1 変数述語であり，「x は y を称賛する」は 2 変数，「x は y を z に紹介する」は 3 変数である。「木星」と「木星の衛星のクラス」のように唯一の意味をもつ名詞句は " 項 " とよばれる。

ラッセルが考えた言語において，すべての項とすべての変数は型をもつ。項の型は，それが意味する対象の論理型により決定される。したがって，項「木星の衛星のクラス」は型 1 である。なぜなら，それが意味するクラスは型 1 をもつからである。述語[3]における変数の型はそれに代入できる項の型を決める。これを示すために，変数の型を添字で表そう。型 1 をもっている項「木星の衛星のクラス」は，「x_1 は 16 個の要素をもっている」の中の変数に代入できるが，「x_2 は 16 個の要素をもっている」の中の変数には代入できない。項「{ 水星，金星，地球，火星 } の部分クラスのクラス」は，型 2 の対象を表すので，その反対になる。

論理的に完全な言語において，構文と意味は連携している。いま示した構文の法則は，1 変数述語の中の変数が型 n をもつならば，それは型 n の任意の項に置き換えられるが，他の型の項に置き換えられないということである。これに対応する意味の法則は，その述語により表現される条件は型 n の各対象について真または偽であるが，他の型の対象について真でも偽でもないということである。一見，この意味の法則は，すべての命題は真または偽であるという論理の法則に矛盾するように思われる。木星は，「x_1 は 16 個の要素をもつ」を満足するという主張を考えよう。木星は型 0 であり，条件は型 1 のものについてだけ真または偽であるので，意味の法則によると，それは真でも偽でもない。しかしながら，型の学説の立場では，主張「木星は 16 個の要素をもつ」は命題ではないので，このことはすべての命題は真または偽であるという法則に反しない。ラッセルの考えを簡単に述べれば，すべての条件 $F(x)$ は意味の範囲をもつということである。真であろうと偽であろうと，$F(e)$ が命題として扱われるためには，対象 e が入るべき範囲がある。その範囲が型である[4]。

要約する。(1 変数述語に対する) 構文規則は以下のようである。

> 1 変数述語の変数が型 n であるならば，その変数は，型 n の任意の項により置き換えられ，他の型のどの項にも置き換えられない。

これに対応する意味の規則は，

> 型 n の変数をもつ 1 変数述語により表される条件は，型 n の対象について真または偽である。他の型の対象について，それは真でも偽でもない。

これらの規則は，多変数述語にも拡張できる[5]。

型の学説の言語はまた，**所属関係** $\in$ に関係して重要な規則をもつ。型の学説によると，型 n の対象だけが，型 $n+1$ のクラスの要素として考えられる。$e \in$ C という形の主張が真理値 (すなわち，真または偽) をもつのは，e の型が C の型の 1 つ下のとき，かつそのときに限る。これは以下の構文規則により型の言語に取り入れられる。

> 所属記号の左の項 (または変数) の型は，その右の項 (または変数) の型の 1 つ下でなければならない。

図式的にいい換えておこう。適切に構成された項 (または変数) α と β が与えられ，α が型 m をもち，β が型 n をもつとする。このとき，$\alpha \in \beta$ が**適格**であるのは，$n = m + 1$ のとき，かつそのときに限るということである。実際，この規則は主語–述語文を支配している規則により我々に強要される。なぜなら，(i) 任意のクラスがある条件の外延であり，(ii) 条件 F と対象 e に対し，e は F を満たすもののクラスの要素であるという記述は e が F を満たすという記述と同値である，ということが型理論にとって本質的だからである[6]。

型文法はどのようにしてクラスパラドクスを防ぐか

上に述べた型文法の規則を念頭において，クラスパラドクスを再検討しよう。はじめに，ラッセルのパラドクスを思い出そう。

(1) 任意の条件 $\mathrm{F}(x)$ と任意の対象 y に対し，$\mathrm{F}(y) \leftrightarrow y \in \{x : \mathrm{F}(x)\}$.

したがって，特定の条件 $x \notin x$ と任意のクラス y に対し，次を得る。

(2) $y \notin y \leftrightarrow y \in \{x : x \notin x\}$.

y が特定のクラス $\{x : x \notin x\}$ のとき，次を得る。

(3) $\{x : x \notin x\} \notin \{x : x \notin x\} \leftrightarrow \{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}$.

型が示されていないので，この議論はそのまま型の言語において再現されない。しかし，型の添字を与えれば，その妥当性を検証しながら議論を進めることができる。k を任意に選び，固定しておく。(1) は次のようになる。

任意の条件 $\mathrm{F}(x_{\mathrm{k}})$ と任意の y_{k} に対し，$\mathrm{F}(y_{\mathrm{k}}) \leftrightarrow y_{\mathrm{k}} \in \{x_{\mathrm{k}} : \mathrm{F}(x_{\mathrm{k}})\}$.

型理論においてこれは問題ない。それは，型 k+1 のクラスに対する内包原理により導かれる。

最初の違反が (1) から (2) の段階で起こる。(2) を得るために，$x_{\mathrm{k}} \notin x_{\mathrm{k}}$ を表す条件が存在することを仮定しなければならない。この表現は $x_{\mathrm{k}} \in x_{\mathrm{k}}$ の否定を省略したものであり，記号で書くと，$\neg(x_{\mathrm{k}} \in x_{\mathrm{k}})$ である。したがって，$x_{\mathrm{k}} \in x_{\mathrm{k}}$ が条件を表さなければ，それも条件を表すことはできない。しかし，$x_{\mathrm{k}} \in x_{\mathrm{k}}$ は，$\in$ の左の表現の型が，その右の表現の型よりも 1 だけ小さくなければならないという規則に違反する。したがって，それは不適格であり，条件を表すことはできない。それゆえ，$\neg(x_{\mathrm{k}} \in x_{\mathrm{k}})$ もまた不適格であり，条件を表すことはできない。

型の文法がこのパラドクスを防ぐもう 1 つの壁がある。表現 $x_{\mathrm{k}} \notin x_{\mathrm{k}}$ が不適格であるという事実を無視し，型 k の対象についての条件を表現している適格な述語であると扱ったとしても，(2) から (3) の段階に規則違反がある。なぜなら，y_{k} に代入するクラスのようなもの $\{x_{\mathrm{k}} : x_{\mathrm{k}} \notin x_{\mathrm{k}}\}$ は，型 k をもつとして扱われている。しかし，そのクラスの要素は型 k なので，そのクラス自身は，型 k+1 をもたなければならない。それゆえ，その置き換えは規則違反である。これらの 2 つの理由により，ラッセルのパラドクスは型の言語において再現できないのである。

では，型の制限はどのようにして他のパラドクスを防ぐであろうか。カントルのパラドクスは，すべてのクラスのクラス U が存在することを仮定し，U の部分クラスのクラス $\mathbb{P}(\mathrm{U})$ が U よりも多くの要素をもち，かつ，もたないことを推論する。この議論は，型の言語においてすべてのクラスのクラスに対する項が存在できないことから防がれる。なぜなら，クラス項の変数はただ一つの型に属さなければならないからである。これは単なる巧妙な方策ではない。型の学説によると，すべてのクラスのクラスは存在しない。なぜなら，すべてのクラスのクラスはすべての型の要素をもたなければならないのに対し，この理

論では，各クラスは1つの型だけの要素をもつからである。

これはどのようにして内包原理と整合するのであろうか。この原理は，任意の条件に対し，その条件を満足するものすべてからなるクラスの存在を主張するものである。これを「クラスである」という条件に適用すると，すべてのクラスのクラス U が存在することが導かれ，内包原理は型の学説に反した結論を導くように思われる。しかし，実際はそうではない。なぜなら，型に関係なくすべてについて真または偽であるような条件は存在しないというのがその理論の一部だからである。それどころか，すべての条件はただ一つの型のものについて真または偽となるのである。したがって,「クラスである」という条件は存在しない。つまり，内包原理は型の学説と両立するということである。なぜなら，その理論は条件とみなされるものを制限するからである。

型の学説によると，クラスであるという条件は存在しないが，任意の正整数 n に対し，型 n のクラスであるという条件は存在する。したがって，内包原理により，型 n のすべてのクラスのクラスは存在し，それを U_n とおく。U の代わりに U_n として，型理論の中でパラドクスの議論が再現されるであろうか。それは再現されない。なぜなら，$\mathbb{P}(\mathrm{U}_n)$ の要素，つまり U_n とそのすべての部分クラス型は $n+1$ であるが，U_n の要素は型 n だからである。したがって，$\mathbb{P}(\mathrm{U}_n)$ のどの要素も U_n の要素ではない。それゆえ，上の議論のように，$\mathbb{P}(\mathrm{U}_n)$ のすべての要素がクラスであるという事実から，$\mathbb{P}(\mathrm{U}_n)$ のすべての要素が U_n の要素であると推論することはできない。同じような検討がブラリ・フォルティのパラドクスにも適用される。すべての順序数のクラスは存在しない。型理論の中でその議論をつくり直そうとしても，説得力のある結果は得られない。

型の学説は受け入れられる解決策か

型文法の制限は3つのクラスパラドクスすべてを防ぐのに十分である。フレーゲの提案のように矛盾を単に移動したのではなく，知られているかぎりは，パラドクスを防いでいる。しかしながら，パラドクスを解消することは，パラドクスを無効にする規則を導入する以上のことを要求する。それはさらに，その規則の根拠となる妥当な原理と，その原理を認識できなかった説明を必要とする。いまの場合，根拠は型の学説である。その原理を認識できなかったことは，

型の区別がつけられていない言語により促される思考の習慣により説明されるかもしれない。しかし，型の学説自体は妥当なのだろうか。

ラッセルは，型の学説は常識的感覚に合致しており，信頼できると述べている[7]。我々が，型の誤りと他の誤りの違いに敏感であるということは本当である。マクドナルド一族がダグラス一家に属するという主張は，マクドナルド–ダグラスの親族関係を知らなくても，すぐわかる欠陥がある。さらに，形式的でない数学の言語においては，対象の範囲ごとに予約された異なる文字 (アルファベットの異なる部分，大文字と小文字，異なるアルファベット，異なる書体) を使うのが習慣である。したがって，数学的な話の構文において具現される排他的な型の考え方は完全に人工的というわけではない。

しかしながら，型の学説は信頼性のためにあまりにも厳しすぎる。プラトンとアリストテレスを要素とする型 1 のクラスを考えよう。そのすべての部分クラスのクラスは型 2 である。これらの 2 つのクラスは多くの共通点をもっている。例えば，それらは両方とも有限のクラスである。これはまず否定できない。しかし，型の学説が正しければそれは拒まなければならない。なぜなら，その主張は，型の学説に反して，2 つ以上の型のものに満足される「x は有限のクラスである」という条件が存在しないと正しくなりえないからである。型の学説によると，それぞれのクラスに満足される「x_1 は有限クラスである」と「x_2 は有限クラスである」という条件は存在する。しかし，両方のクラスに満足される条件は存在せず，両方が有限クラスであることを表現する命題はない。確かにこの点において，型の学説は適当でない。

これに関連して，型の学説によると，混じり合ったクラスは存在しないのである。しかし，なぜ存在しないのであろうか。ダグラス一家だけでなく，ダグラス個人もまた，マクドナルド一族に属する。一族は，混じり合った型の要素，すなわち個体と個体のクラスをもつクラスである。したがって，2 つ以上の型の対象により満足されうる条件がないとか，2 つ以上の型の要素をもつクラスが存在しないと主張することは妥当ではない[8]。しかし，もし混じり合ったクラスが存在するならば，型の学説はクラス全体の存在を否定するための根拠を得られず，したがって，カントルのパラドクスのおそれがある。

さらなる反論は，型の学説をそれ自身の原理のいくつかに適用すると，それらの原理は命題，とくに，真の命題ではなくなるという結果が導かれることで

ある。この指摘はゲーデルによりなされた。型の原理の一つはこうである。

> 対象 x が，意味のある 1 つの命題において対象 y と置き換えることができるならば，意味のあるすべての命題においてそうできる[9]。

これについてゲーデルは言っている。

> 「しかしながら，その原理を疑わしくしているものは，まさにその前提部分がこの定式化を意味のある命題になりえなくしているということである。なぜなら，x と y はそれぞれ定まった範囲に制限されていなければならず，その範囲が一致していても異なっていても，その言明は原理を部分的にさえ表現しないからである。」[10]

ある理論が，その原理の中に，記述できないが示唆されうるいくつかの真の命題をもつことはありうる。しかし，我々は上のように記述をもっているので，ゲーデルの反論に対してこのような説明がどのように役だつかはわからない。もう 1 つの防衛策は，原理は真の命題でなくとも，ある種の正しさをもちうるという説明を使うことかもしれない。これは，おそらく型の学説のもとでの内包原理についていうのがふさわしい。型のない言明は，型の添字の適切な割り当てによって得られるすべての原理を表しており，ラッセルの言葉によれば，“体系的に曖昧”である。その言明は，すべての型特定に対して原理が真であるという意味で正しい。しかしながら，これもゲーデルの反論に対するうまい答えにはなっていない。なぜなら，上の原理はすべての型のすべての対象 (とすべての命題) について同時に扱うことを意図しているからである。

もちろん，我々は，型文法の制限を正当化するための哲学的見解としての型理論と，それらの制限に従う言語において表現される一般の数学の基礎としての公理的体系を区別しなければならない。一般の数学全体がそのような公理的体系から導かれることが実証され，その公理の真実性とその推論規則の妥当性が合理的に疑いのないものならば，一般の数学の真実性に対する信頼は正当化される。型の制限がその言語の中で他の命題の表現を妨げるということは問題にする必要はなく，型の制限が厳しすぎるということは基礎的な目的に対し問題にする必要はない。しかしながら，ラッセルは，それが十分な厳しさではないと感じていた。その理由は，次の 2 つの章で検討される。

第 III 部

言語パラドクスと『プリンキピア・マテマティカ』

1 定義可能性パラドクスと循環論法原理

型の制限によりクラスパラドクスを防ぐことはできるが，ラッセルはクラスパラドクスが型を無視することによってのみ起こるとは考えなかった。どうしてだろうか。ラッセルは，型の制限によっては防ぎようのない他の論理的なパラドクスについて調べており，これらは定義可能性パラドクスとして知られている。彼は一義的説明を好んだため，クラスパラドクスと定義可能性パラドクスはどちらもある一つの原理に違反することに起因すると結論づけ，この原理を循環論法原理 (Vicious Circle Principle) とよんでいる。まずここで 3 つの定義可能性パラドクスを検討し，それからラッセルの分析に入ることにしよう。

定義不可能な最小順序数のパラドクス

L を**意味的に閉じている**言語，すなわち自分自身の表現手段について語るだけの表現手段をもっている任意の言語とする[1]。z を L における定義[2]表現の総数とする[3]。順序数全体の総数というものは存在しないので，z より多くの順序数がある。これから L で定義できない順序数が存在することがわかる。すると，順序数全体は整列順序であることから，L で定義できない最小の順序数が存在することになる。L は意味的に閉じているので,「L で定義できない最小の順序数」ということを L で表現することにより，この順序数は L で定義することができる。すなわち，意味的に閉じているどんな言語に対しても，その言語で定義可能であり，かつ定義不可能でもあるような順序数が存在することになる[4]。

ベリーのパラドクス

有限正整数を英語で表現するのに必要な単語数はその整数が大きくなるに従って増加する傾向があり，どんな有限数 n をも超える。なぜならば，n 個の単語で作られる語句の数は有限であるのに対し，正整数は無限にあるからである。したがって 14 語未満の英単語では定義できない整数が存在し，そのような最小のものが存在するが，これは the least positive integer not definable in English in fewer than fourteen words として定義される。ところがこれは 13 の単語しか含んでいない。すなわち，この整数は 14 個未満の英単語で定義可能であり，かつ定義不可能でもある [5]。

リシャールのパラドクス

このパラドクスは，0 と 1 の間の実数は数え上げることができないことのカントルの対角線論法による証明を作り変えたものである [6]。L はそのすべての定義表現を数え上げることが可能な言語 [7] で，カントルの証明を表現できるものとする。このとき，0 と 1 の間の実数で L で定義可能なものの全体は数え上げられる。その全体の数え上げを d_n とし，$\mathrm{d}_n(k)$ はこの数え上げにおける n 番目の実数の 10 進小数展開中の k 桁目の数字とする。すると，L で次の 0 と 1 の間の実数が定義される。

$$\mathrm{c}(n) = \begin{cases} \mathrm{d}_n(n) + 1, & \mathrm{d}_n(n) < 9 \text{ のとき} \\ 0, & \mathrm{d}_n(n) = 9 \text{ のとき}. \end{cases}$$

この定義により，すべての正整数 n に対して，c は d_n と n 桁目で異なっている，すなわち $\mathrm{c}(n) \neq \mathrm{d}_n(n)$ であることが保証される。したがって c は 0 と 1 の間の L で定義可能などんな実数とも異なっている。しかしこれは L で定義可能なことは今しがた証明している。よって，L で定義可能でもあり定義不可能でもある実数が存在することになる [8]。

定義可能性パラドクスと型文法

定義可能性パラドクスが型の制限の違反から起こるものと診断することはできない。同様のパラドクスは型の文法を組み込んだ言語にも見いだすことができるのである。定義不可能な最小の順序数のパラドクスを例としてこれを考えてみよう。第一に，与えられた言語 L に対して，L–定義不能な最小の順序数があるとすると，それが自分以下の型のクラスに属していなければならないと考える理由はない。第二に，L が型付き言語でそれぞれの型において意味的に閉じているとすると，パラドクスが以下のように再生産される。L の文の数より濃度が大きい順序数全体の始切片を含むような型 n が存在すると仮定してもよい。このとき問題を生じる定義は，次のような項に関するものである。

> 「y_n は順序数で，かつすべての x_n について x_n は y_n の L での定義ではない」かつ「すべての z_n について，z_n が順序数で，かつすべての x_n について x_n が z_n の L での定義でないなら，$y_n \leq z_n$」となる y_n.

これは型 n のある要素を表す項であり，よって次の開放文

> ある w_n に対して，w_n は x_n の L での定義である

の自由変数 x_n に代入してもかまわない。この代入によって，(型 n の) L(n)–定義不能な最小の順序数は定義可能であるという矛盾した文が得られる。しかし，これには型文法に対する違反は含まれていない。

循環論法原理

結論として，定義可能性パラドクスの解決のためには何か新しいアイデアが必要だということになる。ラッセルは一見論理的な性質をもつ既知のパラドクス，つまりクラスパラドクス，定義可能性パラドクスやその他のパラドクスの根源には共通の誤謬があると考えた。ポアンカレによる提案を受け入れて，彼はその共通の誤謬は循環論法原理への注意の欠如であると主張した[9]。

しかし循環論法原理とは何であろうか。この原理のラッセルによるさまざまな言明はどれもはっきりしない[10]。『プリンキピア・マテマティカ』の序説 第2章における循環論法原理についての節は次のように始まる。

> 「パラドクスを避けるための分析からわかることは，それらはすべてある種の循環論法に原因があるということである。問題の循環論法は，ものの集まりがその集まり全体を用いて定義されるような要素を含んでよいと考えることにより起こる。」[11]

これから次のスローガンが抽出できる。

> その集まりによってでしか定義できないような要素を含む集まりは存在しない。

同じ節の後半では，この原理の混乱した言明がみられるが，煮詰めていえば次のようになる。

> その集まりを前提とするような要素をもつ集まりは存在しない。

これに続く段落では三つめの形式化がみられる。

> ある集まりのすべてを含むものはその集まりの中には入れることができない。

ここにある原理は単一かそれとも複数あるのかという問題に対する注釈者たちの意見は一致していないが[12]，私の判断では，そのことを決定するのにはこれらの言明は明確さを欠いている。あるものを集まりによって定義するとはどういうことか。あるものがクラスを前提とするとはどういうことか。あるものが集まりのすべてを含むとはどういうことか。ラッセルによるこれらの表現の使用からは何の正確な解答も得られない。実際，パラドクスに対するラッセルの反応には２つの異なる原理が含まれているが，にもかかわらず彼はそれらを区別していない。しかしながら，これらの原理のうち１つのみが『プリンキピア・マテマティカ』の体系と関係があり，その原理は広範なパラドクスへの対処に利用できる。よってそれこそが我々が循環論法原理とみなすべき原理なのである。

上にあげた循環論法原理の形式化のうち最初の２つは，集まりについての原理として提示されている。しかし，違った部分を強調したこれらと同値な形式化のほうがより便利である。「その集まりのみによって定義されるような要素を含む集まりは存在しない」という主張は次と同値である。

> 自らが属する集まりによってのみ定義されるようなものは存在しない。

適切に理解されれば，これが循環論法原理である。問題は，この言明の意味が

「によって定義できる」ことの解釈の小さな相違によって変化しうることである。ラッセルはここで明確化の助けになるものをほとんど与えておらず，そのあいまいな形式化は彼があまり正確な説明をもっていなかったことを示している。ラッセルの目的にもっとも合った説明を探し求めることにしよう。

我々があるものを定義するときには述語が用いられるが，これを定義述語とよぶことにする。例えば，正の偶数を定義すると

$$\mathrm{E} = \{x : \text{ある正整数 } y \text{ に対して } x = 2y\}$$

となるが，この定義述語は「ある正整数 y に対して $x = 2y$」である。個体 e が集まり c によって定義されるというのは，定義述語が c について言及する語句を含むときである。例えば次のクラスを定義しよう。

$$\mathrm{G} = \{x : x \text{ は E の要素，かつある素数 } y, z \text{ について } x = y + z\}.$$

G の定義述語は正の偶数のクラスを表す“E”という語を含むので，G はここではそのクラスによって定義されている。しかし，もっと基本的な方法で，あるものがクラスによって定義されることがある。これを説明するには述語の中での変数の現れ方を考えることが助けになる。述語中の変数の出現がその述語において**自由である**とは，その場所があとから適当な名前を埋め込めるような述語の穴を表しているときをいう。そうでないとき，その変数の出現は**束縛されている**という[13]。自然言語の表現においてはしばしば束縛変数が隠されている。すなわち，その束縛変数は表面上の構文に対応するものをもたない意味的構造の構成要素であるということである。例えば「肉眼で見ることができる最古の銀河」という表現を考える。この述語は「肉眼で見ることができる銀河の中でもっとも古い」と同じ意味であり，より形式的にいうと，「x は肉眼で見ることができる銀河で，すべての肉眼で見ることができる銀河 y について，x は少なくとも y と同じぐらい古い」ということである。すなわち「肉眼で見ることができる最古の銀河」には束縛変数が隠されている。論理的に明確な形式における「肉眼で見ることができるすべての銀河」という量化詞句は肉眼で見ることができる銀河のクラスに対応する名前ではなく，そのクラスを暗に指し示す方法である。したがって，ある銀河は他のどれよりも古いということを仮定すれば「肉眼で見ることができる最古の銀河」という表現は，それを肉眼で見

ることができる銀河のクラスによって定義している。よって，あるもの e がクラス c によって定義されるには少なくとも 2 つの方法があることになる。一つめの方法は前に述べたもので，e を定義するのに用いられる述語中，クラス c がある名前かあるいは他の関連する語句によって指示される場合である。もう 1 つは，クラス c が定義述語中の量化詞句によって取り出される領域になっている場合である。したがって，あるものがクラス c によって定義 d で定義されることは，d における定義述語が c をこの 2 つの方法のうちのいずれかによって含むことであるといってよいだろう。

「によって定義する」ことの説明は使用に適した形の循環論法原理にとってはこれで十分であり，そしてこれが最近の循環論法原理の支持者たちの考えでもある。しかしながらラッセルはより一般的な何かを求めていた。彼の考えでは，意味のある表現においては変数が値を変化させる範囲は，(さらなる) 制限が表現の中で明示されているか否かに関わらず，確定しておかなければならない。そして述語中の変数の変域はそれが自由でも束縛でも，その述語の中で関係づけられたクラスのどれかであると考えた。述語によって表される条件はその中の変数の動く変域に依存するという観点からすれば，これは妥当である[14]。量化詞句が指し示すクラスは明らかに量化された変数の変域の部分クラスである。よってあるものを定義する際にそれがその定義における束縛変数の変域に入らないことを保証すれば，それは定義における量化詞句の指し示すクラスに属さないことになり，量化詞句ごとに個別に対処する必要はないのである。したがって，表現 d がクラス c によって e を定義することは，d が e を定義し，c は d の定義述語において項によって指示されるか，または，d の定義述語の変数の変域になっていることと同値であるということができるのである。

『プリンキピア・マテマティカ』では原始的な名前はなく，すべての項は定義されたもので，除去することができるとされている。参照項はしばしば便宜的に導入される。その項が現れる文の論理的な構造を明らかにするには，それは除去されるべきである。述語についても同じことがいえる。変数が整数を動くとして，

> “y が素数である”とは，$y > 1$ であり，すべての x に対して $1 < x < y$ ならば x は y を割り切らない，

とし，さらに

“x は y を割り切る”とは，$x \neq 0$ であって，ある z について $y = xz$,

と定義する。ここから「y は素数である」という表現にはいくつかの束縛変数が隠されていることがわかる[15]。よって定義述語においてすべての変数を明示するには，定義された項と述語を除かなければならない。このことを考慮すると次のことがいえる。

> “d がクラス c によって e を定義する”とは，d は e を定義し，定義された表現がすべて除去されたとき，c は d の定義述語の中の変数の領域になっていることである。

問題となる定義がクラス抽象化演算子を使って $\{x : \mathrm{F}(x)\}$ のようにクラスを定義しているときはこの説明はうまくあてはまる。また，筆者が条件とよんでいるものに理論上対応する命題関数の定義に対しても適合する。命題関数を定義するとは，単にそれを表す述語を与えることであり，それには述語をそれが表現する命題関数の項に変換する演算子が用いられる。例えば $\lambda x[x$ は整数$]$ は，整数であるという条件である[16]。しかしながら最後に注意すべき点が1つある。与えられた条件を満たすものがただ一つあると証明してしまえば，「the even prime (偶素数)」や，より明示的には「the x such that x is an even prime (x が偶素数であるようなその x)」のようにして，定冠詞 the を使って定義することができる。この種の定義は定記述として知られているが，定義されたものは述語の自由変数の変域に属さなければならず，それがある述語の束縛変数の変域に入るときのみ注意を払えばよい。したがって，定記述による定義の場合は例外として，d が e を定義し，定義された表現がすべて除去されれば，c は d の定義述語における束縛変数の変域になっていることであるといえばよい。

循環論法原理は，自分自身が属するクラスによってのみ定義可能なものは存在しないということを規定する。クラスはいくつかの異なる述語で定義することができ，それらの述語は変数の変域に関しては異なっているかもしれない。例えば，$\{x : x > 0\}$ で x の変域を整数全体のクラスとしたとき，これと同値な $\{x : x > \lim_{r\to\infty} 1/2^r\}$ では，x の変域は整数全体で，r の変域は実数全体であるとできる。このクラスは実数全体のクラスから定義することができるが，それが実数全体のクラスから**しか**定義できないというのは明らかに誤りである。こ

のことに注意すると，循環論法原理の実際的な特徴をみることができる。慣習に従って，自分が属するクラスによる定義を**非可述的**な定義とよぶことにする。このときこの原理が意味するのは，あるものを定義して議論の中に取り入れるときには，非可述的でない他の定義を与えるか，その定義が非可述的でないことを示す必要があるということである。非可述的でない定義を与えることなく後者を示す方法を見いだすことは困難であるので，実際的な結論としては，少なくとも基礎的な体系に対しては，非可述的な定義によるものの導入は完全に排除されなければならないということになる。

定義可能性パラドクスのラッセルによる処理

循環論法原理の考察に進む前に，ラッセルによる定義可能性パラドクスの処理について調べてみよう[17]。ラッセルはベリーのパラドクスに対する解を与え，他の定義可能性パラドクスも同じ方法で解決できるといっている。ここでベリーのパラドクスを思い出してみよう。14 語未満の英語表現は高々有限個であり，したがって 14 語未満の英語表現で定義できる正整数の数も高々有限個である。それ以外の無限個ある正整数の中で最小のものが存在し，これはしたがって「the least positive integer not definable in English in fewer than fourteen words」と定義することができる。この定義には 13 語が用いられている。

ラッセルがこのパラドクスを処理した方法は本質的に次のようなものである。この定義文は英語表現全体のクラスについて言及しており，このクラスには定義文が属している。よってこの定義における試みは循環論法的な謬（びゅう）見を含んでいる。パラドクスに対するこの反答は，定義表現を論理的に分析することによってさらに明確にすることができる。最初に次を得る。

[x は 14 語未満の英語で定義できない] ような最小の正整数 x.

次に括弧の中の部分を分析して

すべての y に対し，y が 14 語未満の英語表現なら y は x を定義しない

となる。論理的な分析はこれ以上は必要ない。束縛変数 y の範囲は 14 語未満の英語表現すべてを含まなければならない。よってもとの表現はそのような表現すべてを含むクラスを含んでおり，そのクラスはもとの表現をメンバーとし

て含んでいる[18]。ラッセルはこれを循環論法とみなし，同様の循環論法が他の定義可能性パラドクスにも含まれるといっている。これが定義不可能な最小順序数の場合にどのようにあてはまるかをみるのは容易である。「L で定義できない最小の順序数」という語句は「すべての L–表現 y に対し，y は x を定義しないような最小の順序数」を意味する。この束縛変数の範囲は L–表現すべてを含むクラスになる。よって「L で定義できない最小の順序数」を L に翻訳すれば，自らが属するクラスによる定義でなければならない。これによって循環論法が生じ，よってこの表現は何かを定義することがない。

その見かけとは異なり，このような処置の下地にある指針は循環論法原理ではない。この原理は，自身を含むクラスからしか定義できないものは存在しないということであって，言葉を足していい直せば次のようである。

> あるもの e を含むクラスに言及するような表現によってしか定義されない e は存在しない。

ラッセルが定義可能性パラドクスにおいて強調しているのは，定義の表現がその表現自身を含むクラスに言及していることであって，表現が定義しているものについてではないということである。よって，定義可能性パラドクスへの対処において，ラッセルが頼りにしたものは循環論法原理ではなく，これに代わる次の主張である。

> 表現 x 自身を含むクラスに言及するような表現 x によってのみ定義されるようなものは存在しない。

しかしながら，ラッセルによるラッセルのパラドクスへの対処には循環論法原理が使われている。よってラッセルが異なる原理を混同していたという非難にはある程度真実が含まれている。ラッセルの定義可能性パラドクスの処置の利点が何であれ，彼の利用した原理はすべてのクラスパラドクスを扱うのに使用できるわけではない。「順序数全体のクラスの順序数」に対する論理的に明確な表現には，その表現を含むクラス (あるいはそれと同値ないかなるもの) に言及する必要はないため，彼の原理はブラリ・フォルティのパラドクスとは無関係である。カントルのパラドクスとラッセルのパラドクスは，ラッセルのもう一つの定義可能性原理から同じようにして逃れられるような形をしている。すなわち,「すべてのクラスのクラス」や「自分自身を含まないクラス全体のクラ

ス」の論理的に明確な表現には，それら (あるいはそれらと同値なもの) を含むクラスに言及する必要がないのである。ラッセルがクラスパラドクスと定義可能性パラドクスを１つの原理によって処理しようとしていたのは明らかなので，彼のもう１つの定義可能性原理は無視し，循環論法原理が両方のパラドクスの集合を解決するのに適切であるかどうかを考えていくことにする。

パラドクスの鍵としての循環論法原理

ベリーのパラドクスと最小の定義不能順序数のパラドクスは，同じ方法で循環論法原理によって防ぐことができる。問題表現は「定義できない最小の正整数は」あるいは「定義できない最小の順序数は」ではじまる。当然ながら「定義できない」という表現に定義の問題の根源があるのではないかと考えられるだろう。しかし，これらの表現が「最小の」ではじまるという事実がすでにその非可述性を示している。「F(x) であるような最小の順序数 x」という表現形式を解いてみると

$$[\mathrm{F}(x) \text{ かつすべての順序数 } y \text{ について } \mathrm{F}(y) \text{ なら } x \leq y] \text{ となる順序数 } x,$$

となる。「順序数」を「正整数」に置き換えても同じである。このような表現での言及先は (もしあるとするなら) 束縛変数 y の変域に入っていなければならないことは明らかである。よって「最小の順序数 $\cdots$」ではじまるいかなる定義も非可述的ということになる。同じことは正整数全体や他のあらゆる整列されたもののクラスにも適用できる[19]。これらのパラドクスそれぞれにおける定義もどきは非可述的であり，非可述的でない同等な定義がないため，循環論法原理によれば定義もどきが実際に何かを定義していると仮定することはできない。よってこれらのパラドクスは循環論法原理によって防がれているのである。

しかしながら，これらのパラドクスが「最小の」という言葉の使用のみから起こっているということは信じがたい。例えば,「電子」という単語の本来の使われ方により，最小の電荷を定義する際には論理的な誤りはいっさい含まれない。問題は，少なくとも部分的には，定義されるものが (ある方法によって) 定義できないものとして表される場合である。しかしここでは循環論法原理を適用することはできない。というのは，あるものを定義不能と記述するときに指

し示されるクラスは表現のクラスであるのに対し，定義されるものは表現ではないので，したがって，定義不可能性への言及は非可述性の源とはならない。この理由により，循環論法原理がこれらのパラドクスへの鍵であるということは説得力がない。

リシャールのパラドクスでは，与えられた言語 L がある目立たない性質をもつとしている。L で定義可能な 0 と 1 の間の実数全体のクラス D が存在するとして議論は進んでいき，D は数え上げ可能で D のある数え上げ d が L で定義可能であることが導かれる。そして d の対角化 c が L で定義可能であることが導かれ，ここからすぐに矛盾に到達する。実数 c が d によって定義され，d は D によって定義される。よって c は D によって定義される。c は D に入っていなければならないので，その定義は非可述的である。非可述的でない c の定義がみつからないので，循環論法原理によって， c の定義もどきが何かを定義していると仮定することは許されないのである。

循環論法原理がリシャールのパラドクスを防ぐために使えるとして，この原理は本当にその解を与えるのだろうか。これに答える代わりに，たまたま選んだ代わりのものについて述べて，本題はこのままにしておくことにする。その代わりのものとは，意味的に閉じた言語 L では，いろいろな意味的な述語が定まった外延をもっていないというもので，これらの中には「x は L で定義可能である」の L における翻訳や,「x は L で定義可能なしかじかのもの」という述語の L における翻訳がある。例えば L を英語として，条件「英語で定義可能な 0 と 1 の間の実数」を満たすもの全体のクラスは存在せず，そのようなクラスは存在しないので，その数え上げ d も存在せず，よって d の定義といったようなものも存在せず，そこから対角化によってさらなる定義を得るということもない。他の定義可能性パラドクスについても同じ解決が可能である。「x は 14 語未満の英語で定義できない整数」や「x は英語で定義できない順序数」といった述語は外延をもたない。これらの述語の外延となるようなクラスが存在しないので，これらは意味的に閉じた言語[20]に対する内包原理の反例を与える。よって無制限の内包原理は，定義可能性パラドクスとクラスパラドクスの両方の真の根源であるとみることができる。

循環論法原理はクラスパラドクスを取り扱うときにはより良く機能するであろうか。カントルのパラドクスではユニバーサル クラス，すなわちクラス全体

のクラスの存在を仮定する。もしユニバーサル クラス $\{x : x = x\}$ が存在するとしたら，それは明らかに定義述語「$x = x$」の自由変数の変域に入っていなければならない。そしてこれを避けるようにユニバーサル クラスを定義する方法はないので，循環論法によってユニバーサル クラスというものは存在しないことになる。まったく同じ議論が $\{x : x$ はクラス $\}$ の場合にもあてはまるので，カントルのパラドクスは循環論法原理によって防がれるのである。[21] ラッセルのパラドクスでは $\{x : x \notin x\}$ や $\{x : x$ は $x \notin x$ なるクラス $\}$ の存在が仮定されており，それぞれの場合において，そのクラスは定義述語の自由変数の変域に含まれていると仮定される。再びこれを避けるような別の定義がないので，これらのクラス項が何も定義しないことが循環論法原理によって得られる。したがって，カントルのパラドクスとラッセルのパラドクスはともに循環論法原理によって防がれるのである。

ブラリ・フォルティのパラドクスはもっとやっかいである。順序数は整列クラスの属性，すなわちその順序型である。数学的な目的のためには順序数はそれをもつような整列クラスと同一視することによって標準的な方法で表すことができる。これは順序数全体のクラス自身が順序数であり，したがって $\{x : x$ は順序数 $\}$ の中の述語中の自由変数の変域に入っていることになるだろう[22]。しかし，ブラリ・フォルティのパラドクスは順序数を代表例と同一視するということには依存せず，そのような同一視がなければ $\{x : x$ は順序数 $\}$ はそれが属するようなクラスによって定義されると考える理由はない。よってここでは循環論法原理からは何も得られない。しかしその原理は，$\{x : x$ は順序数 $\}$ の代わりに「$\{x : x$ は順序数 $\}$ の順序数」という表現を考慮するなら確かに効果がある。というのは，もし後者の表現が何かを定義しているとするなら，その表現されているものはそれによって定義されるようなクラスに属しているはずであり，これを避けるような他の定義がないので，循環論法原理によってすべての順序数のクラスの順序数が存在することは認められないからである。しかしながら，これはパラドクスを避ける方法ではない。なぜならば，いったんすべての順序数があることを受け入れると，それは整列クラスであると認めざるをえないので，その順序型は順序数である。ここまでくると我々は破綻する。なぜならば，この代案，すなわち整列クラスに順序型がないというのはまたパラドクス的であるからである。よって，ブラリ・フォルティのパラドクスが循環論法原理に

よって解決されたと考えるのは誤りである。

要約すると，定義可能性パラドクスは循環論法原理によって防ぐことができる。しかし循環論法原理の違反がこれらのパラドクスの根源にある誤りであるというのは妥当ではなく，もっと見込みのある代案がある。それは意味的に閉じた言語の意味的な述語に対する内包原理をはねつけることである。クラスパラドクスに目をうつすとそれらは循環論法原理によって防ぐことはできるが，ブラリ・フォルティのパラドクスはこの方法では明らかに解決はできない。3つのパラドクスにすべて同じ解決法があるとすれば，カントルとラッセルのパラドクスも循環論法原理によって解決されることはなさそうである。そしてここでもまた循環論法原理の代案があり，それは対象 (集合) のクラスとそうでないクラスを区別するカントルの方法を用いるものである。カントルのアプローチにはパラドクスとは独立の動機づけによる妥当な原理からの補足が必要であり，ラッセルがこの問題に取り組んでいたときそのような原理は視界になかった。さらに，外見上論理的な性質をもつパラドクスにはすべて何らかの種類の循環が潜んでいることは確かである。よって，循環論法原理がすべてのパラドクスへの鍵であるというラッセルの直観は誤りであったとしても，きわめて賢明であったのである。

循環論法原理を信じるべきか？

パラドクスはさておき，循環論法原理が正しいと考える理由はなんであろうか。この考えを動機づけるには命題関数によるのがもっとも簡単である。以前に述べたように，命題関数は条件に対してラッセルが理論的に対応づけたものである。条件を属性と同一視するというラッセルの無害な便法を採用することにしよう。つまり，$\lambda x[x$ は勇敢である$]$ ＝勇敢であるための条件＝勇敢さ，といったことである。わかりやすい例を考えてみよう[23]。もし偉大な将軍に必要とされる属性を並べあげるとするなら，勇敢さとともに決断力，戦略的な巧妙さ，戦術上の柔軟さ，威風堂々とした落ち着きやその他の属性をあげられる。さて，偉大な将軍に必要とされるすべての属性をもつ属性 G を考える。すなわち，

(G) $\lambda x[$ すべての y について y が偉大な将軍についての属性ならば x は y をもつ$]$。

G 自身は偉大な将軍に必要な属性である。というのは，G に欠ける人はすべて偉大な将軍に必要なある性質に欠けており，よって偉大な将軍にはなりえないからである。G の定義述語中の束縛変数 y の変域は偉大な将軍に必要な属性のクラスを含み，G はそのような属性の一つなので，G は y の変域に含まれる。よって G はここでそれを含むクラスによって定義される。いい換えると，G の定義は非可述的である。よって循環論法原理によれば，これが G の唯一の定義であるならば，G はまったく真の属性ではありえない。

この結論は正しい。G のような属性が存在するなら，それをもつということは偉大な将軍に必要な属性のリスト上の属性すべてをもつということによっている。そして G 自身もそのリスト上にあるので，G をもつということは G をもつということに依存する。しかしこれは不可能である。これに関連した依存性が構成要素である。父親であることは，男性であることと子供がいることに構成要素として依存している。またそれら 2 つの属性は併せて父親であるための構成条件となっている。父親であるために父親であるという条件を付け加えるのはばかげている。一般に，ある属性をもつことはその同じ属性をもつための条件の構成要素にはなりえない。「偉大な将軍に必要な属性をもつ」という表現は「偉大な将軍に必要な 1 階の属性をもつ」という意味に解釈するのが自然である。ここで属性が“1 階”であるとは，それが属性への言及なしに定義できることである。これが，G の定義もどきがある属性を定義するのに成功していると思う我々の感覚を説明している。他方，そのような方法で解釈しなければ無意味である。というのは，定義もどきはちょうど循環論法原理によって排除された形の循環となっているからである。おそらく，この種の無意味さでもっとも単純な場合は次のようなものである。H は属性 H をもつ属性として

(H) $\lambda x[x$ は H をもつ$]$

とする。明らかに実際の属性は何も定義されていないようであるが，この直観は循環論法原理の単純な拡張に支えられている。循環論法原理とは，それ自身かそれを含むクラスによってしか定義されないものはないということであった。

属性 (あるいは条件，あるいは命題関数) の定義に対して，循環論法原理はしばしば我々の直観とよく調和している。しかし時にそうでないこともある。丸いということや赤いということは属性であり，したがって，属性であるという

ことがそれらの属性の一つである。よって属性であることは属性である。すると，属性であることはその定義述語

$\lambda x[x$ は属性$]$

の自由変数の変域に収まっていなければならないことになる。ここには何もおかしなことはないように思われるが，循環論法原理の指示によれば，そのようなものは存在しないことになる。また，定義述語の束縛変数の変域に収まる属性の一見問題のない実例もみつけることができる。例えば，それと気づかずにもっているような属性をもつ属性，すなわち

$\lambda x[$ある属性 y に対して x は y をもつが y をもつとは気づいていない$]$.

また，定義述語の自由および束縛変数両方の変域に収まっているような属性もあることがわかる。例えば，属性の結合であるような属性

$\lambda x[$ある属性 y と z が存在して，x をもつことは y と z 両方をもつことと同じであるような属性$]$

である。自由変数 x と束縛変数 y と z の変域は属性全体のクラスを含んでおり，よってここで定義された属性はそれらの変域に収まっている。

しかしながら，属性についての我々の直観は完全に確かなものではない。それ自身の属性ではないような属性であるという属性が存在するように思われる。表現不可能であるという属性などがその例であろう。しかし，この属性 ($\lambda[x$ は自分自身の属性でないような属性$]$) がそれ自身の属性であるかどうかを考えると，すぐにラッセル流のパラドクスが得られる[24]。よってパラドクスを避けるために我々の直観に対して修正が必要である。そしてその最適修正により，パラドクスを招くような直観と同時に，害のない直観も排除することも十分起こりうるのである。もしここで排除すべき直観をもった理由について説明する方法があれば，この救済策はより好ましいものになる。ラッセルは，循環論法原理と対立する (属性についての) 直観を，彼の階の理論によって説明している。おおまかにいうと，属性が 1 階であるとはそれがいかなる階の属性にも言及しないことをいい，n が 1 より大きいとき，属性が n 階であるとはそれが $n-1$ 階の属性には言及するが，それより高い階のものには言及しないことをいう。すると，すべての正整数 n に対して

$\lambda x[x$ は n 階の属性$]$

で定義される $n+1$ 階の属性が存在する。$\lambda x[x$ は属性$]$ というのが“真の”属性であるという我々の直観は，ここで次のように説明することができる。ほとんどすべての文脈で我々の興味は 1 階の属性に限られているので，我々は属性の階を見落としている。隠れた指針を見いだせずにそういったものがないと考え，それゆえ「x は属性である」は明確な属性を表しているとするのである。

属性に対する循環論法原理は 2 つの考え方が基礎となっている。一つめは自分自身を構成要素とするような属性は存在しないということである。これは明らかに正しいように思われる。もう 1 つの基礎は，ある属性がクラス c によってでしか定義できないとして，その属性は c のすべての要素に構成要素として依存する場合がある。これは正しいかもしれないが，これについての説得力のある理由を筆者は知らない。属性，すなわち命題関数は内包的である。つまり異なる命題関数が外延的に同一であるかもしれず，命題関数の構成はその表現に強く結びついていて[25]，ある述語の意味的な諸構成物の意味値 (あるいは言及) は，表現される命題関数の構成物になっていると考えられる。変数の変域をその意味値としてとれば，命題関数はそれを表現する述語中のすべての変数の変域に構成要素として依存することになる。これから，命題関数はその定義に用いられるいかなるクラスにも依存するという結論が得られる[26]。しかし，その定義に用いられるクラスのすべての“要素”に依存するという結論はどのようにして得られるのであろうか。

属性 (または条件または命題関数) に対する循環論法原理についてのとりあえずの結論は，いくつかの強い直観と両立しないが，それでも正しいであろうというものである。その他の直観はこの原理を確かなものにしており，それと相容れないものについてはうまく言い抜けることができる。しかしながら，属性に対する循環論法原理については従わざるをえないいかなる理由もないので，状況は確かというにはほど遠いのである。

クラスについての循環論法を動機づけるのはより困難である。クラスはその要素，またその要素の要素，さらにまたその要素たちの構成する木の下すべてのものに構成的に依存している[27]。クラスは通常与えられた述語の外延として定義される。しかしながら述語において言及されているものは，述語の外延の要素たちの木からはみ出すことがしばしばある。例えば，すべての知覚生物の

光円錐の外側にある星全部のクラスというのを考えてみる。星には要素は含まれないので，このクラスを表す要素木の要素は単にそのクラスの要素それ自身である。よってこのクラスはその要素，つまり特定の星のみに依存している。それは「すべての知覚生物」の範囲に収まっているが，女王のコーギー犬には依存しない。原理的にこのクラスを知覚生物に言及せずに定義するのは不可能であるが，にもかかわらずこのクラスは知覚生物には依存していない。知覚生物全体を指し示すもの以外のどんな述語もこのクラスを外延としてもたなかったとしても，このクラス自身は知覚生物には依存しないだろう。

数学的なクラスは違うであろうか。実数の表現をクラスとはせずに連続的な大きさをもつ量の比と考えると，実数のあるクラスはその要素のみに依存し，それ以外には依存しない (というのはその要素は要素をもたないからである)。にもかかわらず，そのクラスの要素でないような整数によってのみ定義されるようなクラスが存在する。その例としてはカントル集合がある [28]。これは 0 と 1 の間に含まれる実数の数の集合であるが，正整数の無限集合を含む範囲をもつ束縛変数を使わずに定義する方法は存在しない。カントル集合のいかなる記述も正整数全体に依存するが，クラス自身は依存しない。すなわちクラスは数学的なクラスであっても，その記述が依存するすべてのものに依存する必要はないことが導かれる。よって，あるクラスがそれ自身に依存できないという事実は，クラスの記述がまさにそのクラスに依存できないと考えるよりどころにはならない。クラスに関する循環論法を除外する原理は，どんなクラスもそれ自身の要素木には現れることができないというものであるが，これは型の理論によって認められるものである [29]。クラスとは外延的なものであり，循環論法原理は内包的な対象に対してのみ，妥当なものである。

ラッセルは外延と内包の区別に敏感であったにもかかわらず，なぜ循環論法原理を制限なしに信じたのであろうか。その答えは，筆者が考えるには，外延的対象とはクラスであり [30]，さらにラッセルによればクラスとは論理的なつくり事であるからではないだろうか。彼の主張では，クラスに対する外面上の言及は命題関数への言及で置き換えられうる便法にすぎない。すなわち「クラスについての［ある］命題は，それを定義する［命題］関数についての言明にいつも還元される」[31] のであり,「クラスはそれが導入される限りにおいては，単に記号的，あるいは言語上の便法であって，個体である要素のように真の対象

ではない」のである[32]。この観点において，クラスについて述べることは内包的であり，よってラッセルは上にあげたような循環論法原理への反対意見をかわすことができたのである。

結　論

循環論法原理は，実用的な結果を導く対象物をそれを含むクラスを用いた定義によって議論に取り入れてはならないということである。上に述べた理由により，パラドクスがこの実用的結果への違反によって生じると説明されるのは疑わしい。循環論法原理，もしくはそれに近いものは内包的対象物に対しては正しいかもしれないが，外延的対象物に対してはまったく妥当ではなく，純粋な数学の存在論はおそらく外延的なのである。これは循環論法原理を重んじて開発された論理的な文法が数学の基礎体系の枠組みにはなりえないということを意味しない。ラッセルが求めたものは，パラドクスを禁ずるには十分厳密であるが，そこで古典的な数学を展開するのを禁ずるほどには厳密でない枠組みであった。ラッセルが提案したものは現在，分岐型理論とよばれており，『プリンキピア・マテマティカ』の枠組みとなっている[33]。これについて次の章で説明することにする。

2 『プリンキピア・マテマティカ』

『プリンキピア・マテマティカ』の宇宙

『プリンキピア・マテマティカ』(**PM** と記す) の目的の一つは，未定義要素をなるべく少なくして数学の命題を再形式化し，なるべく少ない未証明の前提から，確立されている数学全体を導くことである[1]。ラッセルは未定義要素は論理的なものであるとみなし，このプロジェクトの成功によって数学的真実は論理的な形の真実であることが示されると推論した。

> 「それゆえ数学は変数と論理定数のみを含む命題，すなわち純粋に形式的な命題により構成される。というのは，論理定数は形式を定めるものにほかならないからである。」[2]

このような数学観にも関わらず，**PM** は個体と命題関数を有する存在論をもっている。命題関数とは適切に構成された述語で表現されるものであるが，命題関数は与えられた言語では表現できないこともある。命題関数 $\varphi(x)$ は入力の定められた範囲をもち，入力 c に対するその出力は命題 $\varphi(c)$ である。よって命題関数 $\lambda x[x$ は惑星である$]$ は，すべての個体そして個体だけを入力としてとり，個体のプラトンと冥王星に対するその出力は,「プラトンは惑星である」と「冥王星は惑星である」という命題となる。**PM** は個体，命題関数そして命題といったものの存在には関わっているが，それ以外はクラスの存在にさえ関わっていない[3]。

クラス項の使用は **PM** のいたるところにみられ，クラスのためだけに与えられた複数の節が存在する。また，なじみのある数学の対象はさまざまな構成によるクラスとして提示される[4]。にもかかわらず，**PM** の公式な立場というのは，クラスが存在するかという問いに対してはあえて中立である[5]。ここには切迫感はない。というのは，形式理論はクラス項を含む文を含まないものに変

換する方法を与えるからである[6]。すなわちクラスを仮定する必要もなければ，それを否定する必要もないのである。

> 「我々の目的にとっては，しかしながら，クラスのようなものは存在しないと教条的に主張する必要はない。ただ必要なのは，クラスの代理として導入された不完全な記号が，本質と考えられるクラスのための命題すべてを生み出すことを示すことである。これが示されたとき，未定義概念を節約する原理からクラスは不完全な記号としてしか導入されないことが導かれる。」[7]

よって立場としては，クラスはあるかもしれないし，ないかもしれないが，それがなくても **PM** の命題は真なのである。

このように，クラスを認めるのを嫌がっている原因は何なのだろうか。**PM** の序論の III 章では，**一**と**多**についての古典的な問題についてふれられている。いくつかのもののクラスが対象として認められるならば，それは 1 つのものであり，また多くのものでもあるので，これは不可能であるというものである。これは，クラスの実在性に反対する決定的な議論としてはとらえられないが，「数学の原理」[8] でラッセルが示した心配事に話を戻すものである。そこで彼は，人類のような「多」としてのクラスと，人種のような「一」としてのクラスとの区別について論じており，それによって古くからの問題を解決している。しかし，ラッセルはこの区別が単一クラス (1 つだけ要素をもの) と空クラス (要素をもたないもの) に対しては崩壊すると考えた。どちらの場合においても多数性は存在せず，どちらの場合においてもラッセルは 1 つの対象はないと感じていた。すなわち，1 つの対象とみなした単一クラスはその唯一の要素以外の何物でもなく，空クラスを 1 つの対象とみなすのは不可能である。というのは，何もないクラスというのはありえないからである。にもかかわらず，その時点でラッセルの知っていたクラスの形式理論は空クラスを仮定し，単一クラスをその唯一の要素と区別していた[9]。

ラッセルの関心はこれよりももっと深いところにいっていたのではないかと筆者は思う。通常の非数学的なクラスの概念は 2 種類に分類される。すなわち，多数性，収集，集合体といったものと，これとは対照的な，範疇，種類，あるいは概念といったものである。前者ではクラスとは単に集められたものであり，容れ物のようなそれらに付加したものではない。これは多数としてのクラスである。しかし，数学では 1 つの対象物としてのクラスが必要とされる。なぜな

らば，我々は時としてこれらを数えたいからであり，それは n 個の要素のクラスの r 個の要素をもつ部分クラスは ${}_n\mathrm{C}_r$ 個である，といったような場合である。後者の場合ではクラスは単一のものであるが，しかしそれは多くの対象を1つにまとめて考える方法であり，すなわち知性の道具であって，ラッセルの導入した「クラス概念」なのである。さらに数学では，点クラスのような思索や言語から独立なクラスを仮定している。よって，クラスについての特別な数学的概念が必要となる。しかしどうして，実際にあるものがクラスの数学的概念に役だつと考えられるのだろうか。集められたものとは別に，それらの上に思索から独立な対象物である集合体が存在すると考えることは健全な実在の感覚に反することにはならないだろうか。そのようなものが実在であると考えると，我々はすぐに単一クラスと空クラスに関する哲学的なパズルに出会うことになるのである。このパズルには答えがあるが，数学的クラスについての主たる問題[10]，すなわち，それは何であるか，ということに対して答えるのは容易ではない。ラッセルはフレーゲの解答，クラスの数学的概念は観念の外延の論理的観念に一致するというもの，を知っていた(そして，彼はフレーゲの答えにより，単一クラスと空クラスの存在が確かめられることも知っていた。すなわち，それは「$x =$ ユークリッド」や「$x \neq x$」といった概念の外延である)。しかしこの答えはすべての概念は外延をもつということを仮定しているようであり，その仮定は他のもっともらしい仮定と合わせると矛盾が導かれることがラッセルによって示されている[11]。

筆者が考えるには，以上がラッセルの「クラスなし」観点の重大な動機づけであるが，彼はまたいくつかの弱い理由を与えている。ある箇所において彼はカントルの定理を(「クラスはその部分クラスたちより少ない要素をもつ」と解釈して)クラスの存在を拒絶する土台に使っている。すなわち，ものよりも多くのクラスが存在するので，クラスはものではありえないというわけである[12]。この議論ではすべてのもののクラスが存在することを仮定しており，また **PM** の文法では「すべてのもの」という観念は違法なものとして排除されているので，この議論は **PM** の世界へのクラスの導入を拒絶することの重大な動機としてとらえることはできない[13]。にもかかわらず，パラドクスに関連して，クラス議論についてのこの観点を支持する利点はある。循環論法原理が，クラスに対してはきわめて受け入れがたいのに対し，命題関数に対してはかなり受け入

れやすいという前章で論じた事実からこの観点が生じる。さらに「クラスなし」観点は，命題関数に対する循環論法原理の受け入れやすさをより大きなものにする。というのは，クラスがその要素以上のものでないとするなら，命題関数がそれを定義しているどのようなクラスにも構成要素として依存しているという事実は，それを定義しているクラスの要素に構成要素として依存しているという意味になる。すなわち，命題関数に対する循環論法原理は，自分自身に構成要素として依存するものはないという事実から導かれる。だから，もしクラスがそれを定義する概念，あるいはその要素と違って，単なるつくり事であるとしたら，循環論法原理が数学の基礎体系を構成するための良いガイドになるということかもしれない。

階　層

PM の項 (変数，および命題関数とクラスに対する項) は階層に分類され，これに対応するものの分類がある。この分類を用いることにより，構文的規則が循環論法原理と抵触しないことを確実にする。すべての変数は自然数により示される唯一の階をもつ [14]。これを用いて，階の層が以下のように定義される。

> “命題関数項あるいはクラス項が $n+1$ 階である”とは，その定義述語 [15] が n 階の自由または束縛変数を含み，自由，束縛に関わらず n 階より大きな変数を含まないときをいう。
>
> “0 階の項”とは，単に 0 階の変数 (または個体定項) のことである。
>
> “$n+1$ 階の項”とは，$n+1$ 階の変数，$n+1$ 階の命題関数項と $n+1$ 階のクラス項のみをいう。

この階層は，以下のようにもの (entity) の階層に移行される。

> すべての個体は 0 階であり，n 階の項で表される命題関数あるいはクラスは n 階である [16]。

便宜上，属性と命題関数を同一のものとして扱うことにしよう。この階層の例として，個体の命題関数で 1 階，2 階，3 階のものをそれぞれあげる。

(a) $\lambda x[x$ は熟練した軍事戦略家である$]$

(b) $\lambda x[x$ は偉大な将軍に必要とされるすべての 1 階の属性をもつ$]$

(c) $\lambda x[x$ は偉大な将軍に必要とされる 2 階の属性を少なくとも 1 つもつ$]$

式 (b) と (c) における量化詞句「すべての 1 階の属性」,「少なくとも 1 つの 2 階の属性」は，それぞれ 1 階と 2 階の束縛変数の存在を示している[17]。上記の命題関数への入力は個体である。注目すべき点は，命題関数の階数はその定義述語に含まれる自由変数と束縛変数両方の階数に依存するということである。これは，命題関数の階数がその入力の階数と，それを定義するクラスの要素の階数に依存することを意味する。

比較のため，型の定義を思い出してみることは有用である[18]。個体は型 0 のものであり，型 n の入力をもつ命題関数は (型 n の入力をもつクラスとして) 型 $n+1$ である。命題関数の型はその入力の型のみに依存する。この点において型は階数とは異なる。型はまた項の属性でもある。各々の変数は単一の型のものを変域とし，変数の型はその範囲内の対象物の型に等しい。また，命題関数の型はその定義述語の自由変数の型の 1 つ上であり，よって束縛変数は関係しない。すなわち，命題関数 (a), (b), (c) はすべて型 1 であるのに対し，階数はそれぞれ $1, 2, 3$ である。型 2 の命題関数の例としては

(d) $\lambda\varphi[\varphi$ は，偉大な将軍に必要とされる 1 階の属性である$]$

(e) $\lambda\varphi[\varphi$ は，偉大な将軍に必要とされるある 2 階の属性をもつ誰もが有する 1 階の属性である$]$

がある。これらの関数 (d), (e) への入力は個体の命題関数である。よって (d) と (e) は型 2 をもつ。これらの階数はどうだろうか。ここで変数 φ は 1 階の変数のつもりであり，その変域は個体の 1 階命題関数である。これが (d) の表現に含まれる唯一の変数であるから，(d) は 2 階である。(e) の表現は 1 階変数 φ だけでなく，量化詞句「誰もが」と「ある 2 階の属性」で示される変数をもち，これらの階数はそれぞれ 0 と 2 である。よって (e) は 3 階である[19]。

PM において，構文的代入規則がなんであるかはあまりはっきりしない。本文中には型や階数を示すものはまったく存在しない。**PM** の序章において，それらを与える方法が明らかにされているはずであるが，詳細は省かれている。1 変数述語の自由変数が n 階ならばそれを n 階の項で置き換えられると考えるのは自然である。しかし **PM** における説明では，型が t で n 階の自由変数は，型

が t で n 以下の階数をもつすべてのものを変域とすると考えても矛盾しない。この場合，型 t で n 階の自由変数は型 t で n 以下の階数をもつ任意の項で置き換えることができる[20]。命題関数 $\lambda x[x$ はかくかくしかじかである／をもつ$]$ の型と階数について上で述べたすべてのことは，必要な変更を加えて，これに対応するクラス $\{x : x$ はかくかくしかじかである／をもつ$\}$ に準用される。

命題関数の階数が，その型より決して小さくならないことは容易に示すことができる[21]。しかし，任意の型に対してその型をもつ命題関数の階数は無限に存在する。というのは，同じ自由変数をもち，束縛変数の階数が増えていくような終わりのない命題関数の列がありうるからである。階数に対する一般的な見方は，型の階層の上に乗っかったものである。実際，ラッセルの解説がこれを助長している。彼はまず命題関数は型によって分類されなければならないと論じ，その後 与えられた型をもつすべての命題関数のクラスは存在しえないと論じており，よって，与えられた型をもつ命題関数はさらに階数によって分類されなければならなくなった[22]。この理由により，**PM** の体系は時に**型の分岐理論**とよばれ，**型の単純理論**と比較される。

階数の理論は，ここでの紹介でみられるよりもっと複雑である。なぜなら，多変数述語によって定義される命題関数については扱っていないからである。しかしもっと複雑にしたところで，哲学的に重要なものは何も得られない[23]。我々の目的にとって重要な点は，非可述的な定義が不可能であるために循環論法原理は階数の体系において重視せざるをえないということである。命題関数の階数はその定義述語中のどの変数の階数よりも高く，n 階の変数は n 階 (あるいはそれ以下) のものの範囲を動く。よって命題関数は，自由，束縛に関わらず，その定義述語のどんな変数の変域に収まることもなく，すなわち，それが属するクラスによって定義されることはありえないのである。同じことが **PM** のクラスについても成り立つ。したがって，**PM** におけるものの定義は，それが属するクラスによって**のみ**定義可能であるということがないように定義されることを自ら示している。

袋小路

知られている論理パラドクスが再現されないような言語を構成できたならば，残る仕事は，数学をその言語に翻訳し，確立された数学理論の原理を導くことである。非可述的定義を言語から除くと安全性は増すが，翻訳の作業はより困難になり，現実には不可能になる。なぜならば，通常の数学，特に実数上の解析では，非可述的定義が本質的な方法で使われるからである。例えば，定数 e は実数 x で

$$1 = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

を満たすものとして定義される。この定義において文字 t は演算子 dt で束縛される変数であり，すべての正実数を変域とするものとみなされる。この類いのことは階数の言語では不可能である。というのは，定義されるもの，ここでは正実数 e のことであるが，これはその定義における束縛変数の変域に収まることはできないのであり，よって t はすべての正実数を変域とすることはできないからである。**PM** においては，それは正実数のうち特定の階数までのもののみを変域とすることができ，すると定義されるものは，それより高い階数となるので除外されることになる。

これは特殊な事例ではない。古典的実解析の中心にある概念[24]は非可述的定義を除外する言語では表現できない。すなわち**最小上界** (上限) や**最大下界** (下限) のようなものである[25]。「最小」や「最大」という単語は非可述性を伝えている。というのは，最小の F は F たちのクラスに属していなければならず，最大の F も同様だからである。クラスへの言及を除いても助けにはならない。つまり「実数のクラス $\{r : \varphi(r)\}$ の最小上界」は「$\varphi(r)$ となる任意の r 以上の最小の実数」の短縮型であり，これらの表現が表すものは何であれ，束縛変数 r の変域に収まっていなければならない。フレーゲの論理体系や **PM** では，整数，有理数，実数はクラスとして定義されており，よって実数のクラス c の最小上界を c の上界のクラスに言及せずに，その体系において実数が定義されている特別な方法を使って定義することを望めるかもしれない。実際これは可能であるが，しかしその方法では非可述性を避けることはできない[26]。同様の注意が最大下界の概念にもあてはまる。

最小上界の概念は本質的なものである。というのは，それが実数論の一つの標準的公理であるデデキントの連続性公理

任意の空でない上界をもつ実数のクラスは最小上界をもつ，

に現れるからである。最小上界の概念を使用しない代わりに，最大下界の非可述的概念，すなわち，任意の空でない下界をもつ実数のクラスは最大下界をもつ，を使用するものもある。(これは実数論の他の公理のもとで，標準版と同等であることが示される[27]。)　ここにホワイトヘッドとラッセルのプログラムの深刻な障害があった。古典的な数学にはデデキントの連続性公理が必要であり，この公理には非可述的概念が必要なのである。非可述的概念を除いた無矛盾な実解析の理論は古典的解析よりはるかに弱いものになる[28]。よって，ここで古典的解析と循環論法原理の間での選択を迫られることになる。

PM の著者たちはこの問題に気づいていた。しかし彼らの気づいていなかったさらに基本的な問題があった。自然数についての数学的帰納法の原理が分岐型理論では証明できないことがマイヒルによって示されている[29]。自然数を表すのに変数 m と n を使うと数学的帰納法の原理は次のようになる。

$\varphi(0)$ であり $\varphi(n)$ となるすべての n に対して $\varphi(n+1)$ であるならば，すべての m に対して $\varphi(m)$ である。

これはデデキント–ペアノ算術の公理の一つである。階数の理論では，帰納法が導かれないような条件 $\lambda x\varphi(x)$ が存在することがわかる。ゲーデルは，$\varphi(x)$ を自然数算術の条件に限定したとしても帰納法が分岐型理論では証明できないかもしれないと指摘している[30]。よって実数解析はいうまでもなく，自然数算術までもが，階数の階層の枠組みでの論理的理論の及ぶ範囲を超えているのである。

還元公理

これらの問題を克服するため，ホワイトヘッドとラッセルは，クラスや命題関数の定義述語における束縛変数を実際上無視することを許す公理を導入した。この公理を理解するのにはいくつかの省略用語が助けになる。2 つの命題関数が**共外延**であるとは，その定義述語がまったく同じものについて正しいときを

いい，命題関数は階数がその入力の階数よりもちょうど1つ上であるとき**平坦**であるということにしよう[31]。例として，次の命題関数のうち (a) と (d) のみが平坦である。

(a) $\lambda x[x$ は熟練した軍事戦略家である$]$
(b) $\lambda x[x$ は偉大な将軍に必要とされるすべての1階属性をもつ$]$
(c) $\lambda x[x$ は偉大な将軍に必要とされる2階属性を少なくとも1つもつ$]$
(d) $\lambda\varphi[\varphi$ は偉大な将軍に必要とされる1階属性である$]$
(e) $\lambda\varphi[\varphi$ は偉大な将軍に必要とされるある2階属性をもつ誰もが有する1階属性である$]$

(a), (b), (c) の入力の階数は0であり，それらの階数はそれぞれ $1, 2, 3$ である。(d), (e) の入力は階数1であり，それらの階数はそれぞれ $2, 3$ である。よって (a) と (b) のみがその入力より1大きい階数をもち，すなわち (a) と (d) のみが平坦である。さて，還元公理は次のものである。

すべての命題関数はある平坦な命題関数と共外延である。

もちろんこれは図式であり，最下階以外の各階層について1つずつの具体例がある。二項関係 (つまり自由変数2つの命題関数) に対する変形も同様に述べられる[32]。

この公理の実用的な意味は何だろうか。これにより，クラスの階数はその要素の階数よりちょうど1つ高くなるものとして，我々はクラスを用いて考える，そして，単純型理論におけるのと同様に議論することが許されるのである[33]。それは，この理論において実数を異なる階数に分離することを避けることができるということを意味しており，このことが還元公理のない分岐型理論の悩みの種であったわけである。例えば，前に与えた定数 e の定義では，束縛変数は正実数の範囲を動くものであった。階数の理論では変数は特定の階数をもつものであるから，e はさらに高い階数の実数でなければならない。同様に，クラス c の最小上界を分岐型理論で許されるように読みとると，クラス c の要素の階数より高い階数のものを定義していなければならない。というのは，この定義は c の要素の範囲を動く束縛変数を含んでいるはずだからである。しかし，還元公理を用いればこのことは避けることができる[34]。同じようにして，デデキントの連続性公理はこの体系で表現され，証明されるようになる。

還元公理によって得られる利点は，実数の舞台のみにとどまらない。純粋数学を通じて見うけられる，制限をゆるめない分岐型理論が禁止するような一般的な構成をこの公理は回復する。例えば代数学においては，ある演算 f で閉じている与えられたクラス c の最小の拡大を考えたいことがしばしばある[35]。これは明らかに非可述的な構成である[36]。階数の理論において得られるこれにもっとも近いものは，c の n 階の f–閉拡大すべてを含む f–閉包拡大であり，これは，n より大きな階数をもつ。このクラスが c の n 階の f–閉拡大で最小のものとして記述できないという事実から，これが意図されたものではないことがわかる (というのはそれは n 階ではないので)。しかし還元公理は，その記述に合うクラスが存在することを導く[37]。もちろん重要な点はこれよりもっと一般的なところにある。それは「c の f–閉包拡大」の代わりに他のどんな性質をもってきても適用でき，最小と同様に最大の場合にも適用できる。

還元公理とラッセルの公理の認識論

還元公理が正しいことはどのようにしてわかるであろうか。この公理は自明なものではなく，それを受け入れる理由は帰納的なものであり，大ざっぱにいって，経験科学が帰納的であるのと同じことである。しかし **PM** の初版ではこれは弱点とはみなされていなかった。反対に，他のどんな公理も同様の経験的基盤をもつと主張している。

> 「公理を受け入れる理由というのは，他の命題の場合と同様，多分に帰納的である。すなわち，ほとんど疑いのない多くの命題がそれから演繹され，その公理を偽とするならそれらの命題を真にできる同程度に妥当な方法が知られておらず，おそらく偽であるようなものがそれから演繹されないということである。」[38]

この種の認識論は，既成の数学の原理を論理的公理から導くことによってそれに完全な確実性を与えるという目標と明らかに相容れないものである。このためには，公理はそれら自身が完全な確実性をもって知られなければならず，帰納的にもたらされることはあってはならないのである[39]。完全な確実性が不可能であるというのは耳新しい話ではなかった。フレーゲの破局によって，すでに外見上の自明さや内在的な明白さは正しさの絶対的な保証ではないということが示されている。一般的な前提が完全な確実性をもつために考えられる唯一

の基盤がその内在的な明白さであるとすれば，公理が完全に確実であると信じるのはもはや理にかなっていない。

> 「絶対的確実性は決して達成されることはなく，したがって，すべての公理とその結論にある疑いの要素がつねについてまわることになる。形式論理においては疑いの要素はほとんどの科学よりは少ないが，しかし，それがなくなることはない。それは制限が必要であるとはわからなかった前提からパラドクスが生じたという事実に現れている。」[40]

それでも，内在的明白さは前提に対する高い信頼性を得るための不適切な基盤だったかもしれない。既成の数学に対して理にかなった高い確実性を内在的に明白な論理的公理からその原理を導くことによって得るという目標は却下されてはいなかった。しかし，ラッセルは還元公理内在的に明白なものではないと感じていた[41]。こうしてラッセルは公理に対する帰納的あるいは「後退的」認識論の開発に駆り立てられた[42]。この公理の認識論に照らして考えると，**PM** のプロジェクトの認識論的側面は次のようにみることができる。数学のデータとは，基礎数学のかなり確からしい命題，例えば，整数論で知られている等式や不等式のようなものとする。このようなデータがある公理の集合からは導かれるが，同程度に好ましい内在的性質をもつようなライバルの公理の集合からは導かれることが知られていないなら，前者の公理の集合が支持される。データによってきわめて強く支持される論理公理をみつけられれば，それに非常に高い信頼性を与えることができ，実解析や超限数論のように問題をはらんでいたり，信じ難い数学の部分が当初もっていた信頼性よりそれははるかに高いものである。すると，それらの部分の信頼度は公理から正確に導き出すことにより，実用的な確からしさにまで高めることができるようになる。

提案されている帰納的認識論に対する疑いは無視することにしよう[43]。解決すべき問題は，還元公理がすでに述べた計画を進めるのに十分なだけその結論によって支持されているかということである。このためには，この公理の結果にその公理なしでは導かれることのないほとんど疑いのない命題が多く含まれていなければならない。我々は，分岐型理論からは導かれない自然数帰納法のいくつかの例が還元公理を付け加えることにより導かれるようになることを知っている[44]。しかしながら，これらの例において帰納される性質[45]はかなり高いレベルの複雑さをもっており，よってそれらの例は「ほとんど疑いのない」もの

のうちに数えることはできない。数論の実証となるデータはかなり単純で量化詞のない基本的な算術演算に関する等式と不等式であり，これらは分岐型理論から還元公理なしで導かれる[46]。よって，還元公理は整数算術からほとんど支持を得られない。この公理が大きな違いを生むのは実数論においてである。この公理が信用されるのはデデキントの連続公理に依存する定理によってであり，これは分岐型理論からは得られない。しかしながら，実数論，とりわけデデキントの連続公理は循環論法原理を受け入れようとする者にとって，ほとんど疑いがないとはみなされない。実数解析の誤りの歴史の頂点において，デデキントが提示したより正確な理論における非可述性は，還元公理がこの方面から支持を得られないことを意味している。実際，基礎づけの計画の主目標の一つは，歴史的な展望からみると，この理論を正当化することであった。すなわち，論理体系とは帰納的に得られない実数論に対する正当性のようなものを与えられるためにあるのであり，よって，この論理体系を正当化するために実数論を用いることはできないのである。したがって，循環論法原理を信じる人の観点からすれば，還元公理はその結論から認識論的な支持をほとんど得られない。循環論法原理は信じないが，型の教義は信じる人の観点からもこの公理はやはり支持を得られない。というのは，還元公理を加えた分岐型理論からの数学的結論のすべてをもつような，少なくとも同等に受け入れられる，これにとって代わるもの，すなわち単純型理論があるからである。

これらすべては「クラスなし」教義の背景に反するものである。**PM** において指摘されているように，すべての命題関数 $\lambda x\varphi(x)$ に対して，それを満たすものすべてのクラス α が存在することを受け入れ，クラスはそれが定義される方法には依存しない対象物として理解されるなら，還元性は保証される。なぜならば，$\lambda x[x \in \alpha]$ はこのとき $\lambda x\varphi(x)$ と共外延で平坦な命題関数となるからである。還元公理に対する帰納的な支持の不足と内在的なもっともらしさの欠如は，ジレンマ，すなわち独立したクラスの存在を受け入れるか，還元公理の放棄か，を示している。

PM の著者たち自身もこの観点に到達しており，**PM** の第 2 版の時点では当初，彼らにこの公理を採用することを促した問題に対して代わりの方法を提示することなく，還元公理をあきらめ,「無理数や実数一般はもはや扱うことができない」と悲痛に認めている[47]。なぜ彼らはこれを放棄したのだろうか。

> 「この公理には純粋に実用的な正当性がある。それは望んだ結果を導き，それ以外のものは導かない。しかし明らかにそれは我々が満足いく類の公理ではない。この問題についてはしかしながら，満足のできる解決がいまだ得られているとはいえないのである。」[48]

これが説明として言うべきことすべてである。還元公理を支持する帰納的な事実がどんなに強力でも，その内在的なもっともらしさの欠如がそれを支持できないものにしていると彼らは感じていたのかもしれない[49]。もしくは，その公理に対して帰納的な正当性を与えるだけではまったく弱すぎると感じていたのかもしれない。

乗法公理と無限公理

ここで**PM**の2つの公理について述べておく必要がある。一つは乗法公理である。この主張は，どの2つも交わりをもたない空でないクラスたちからなる(おそらくは無限の) クラス c が与えられたとき，c のそれぞれの要素とちょうど1つだけ要素を共有し，c のどの要素にも入らないような要素をもたないクラス d が存在するというものである[50]。クラス d は，c のそれぞれの要素からちょうど1つの要素を取り出した結果と考えることができ，この理由から，この公理は現在,「選択公理」として知られている。これが乗法公理とよばれた理由は，積が0であればその因子の1つが0であるという一般基数算術の命題と同値になるからである。「クラスなし」の立場においては，乗法公理は次のことをいっている。多数 (もしくは無限個) の命題関数 $\lambda x\psi_i(x), \lambda x\psi_j(x), \lambda x\psi_k(x), \ldots$ に対して，どの2つもまったく同じものについて真になることはないが，それぞれは少なくとも1つのものに対して真になるなら，命題関数 $\lambda x\varphi(x)$ で，(a) 各命題関数 $\lambda x\psi_h(x)$ について $\lambda x\psi_h(x)$ が真になるようなちょうど1つのものについて真になり，(b) どの命題関数も真にしないものについては真にならない，ようなものが存在する。「存在する」という語句が示すように，これは存在主張である。しかしなぜ，我々はこれを信じるべきなのか。思考や言語から独立なクラスが存在するなら答えがあるのであるが[51]，クラスなしの観点では答えは用意できない。**PM**の著者たちはこの困難に完全に気づいており，証明にこれが必要となるすべての定理を単に条件明記して，そのような定理 T の代わりに

「もし乗法公理なら T」としている[52]。彼らは条件ぬきの定理 T を正しいとみなしたかどうかを明らかにはしていないが，条件化の動きはこれらの定理が彼らの満足に答えるようには与えられていないということを認めている。これは主に無限基数算術の理論に影響を与えるが，無限クラスを含む数学のすべての分野に影響をもたらすことになる。

さて，より大きな困惑を招くのは無限公理であり，これは無限のものの存在性を主張する。現代の用語を用いると次のようになる。すなわち，すべての自然数 n について，ちょうど n 個の要素をもつクラスが存在する[53]。ここでもまた，著者たちは条件化を選択している。

> 「この仮定は乗法公理と同様，それが関わるところで仮説として引用される。その真偽性を判定するようなものが論理には何もないというのが当然のように思われるから，それはただ経験的な土台のみによって正当であると信じられるのである。」[54]

他のところでラッセルはさらに次のように述べている。

> 「無限公理はある可能な世界では真であり，他の世界では偽である。そしてそれが我々の世界において真か偽かを示すことはできない。」[55]

無限公理は乗法公理よりも困り物であるが，これはそれを信じる理由がより少ないからではなく，それが自然数算術で必要とされるからである。特にそれはどんな 2 つの数も同じ後者をもたないというデデキント–ペアノの公理を導くのに必要である。**PM** の体系では無限公理が偽ならば[56]，ある数以降のすべての自然数は合体してしまう。ラッセルはなぜ，この時点で無限公理を支持するのに帰納主義的認識論をもちださなかったのだろうか。彼は無限公理がある可能な世界で偽になると信じていたので，彼はまたある可能な世界ではあるきわめて大きな数以降は合体して 1 つになると信じていたのかもしれない。その場合，その可能性が実際の世界では実現されないということをどうしたら知ることができるかについて考えたであろう。十分大きな数において崩壊があったとしても，小さな数の算術のデータではそれをあばくことはできないと彼は考えたかもしれないのである。

結　論

この仕事が進むにつれて，象と亀の寓話を思い出したとラッセルは後年述べている。数学の世界が落ち着くような象を構築した後，象が落ち着く亀を構築したというわけである。「しかし，亀の安全性は象以上のものではなく，20年ほどの骨の折れる仕事の後，数学的知識を疑いのないものにするという道において私ができることはこれ以上はないという結論に達したのである。」[57]

この言明は，実際にはいくぶん誤解を招くものである。ラッセルはパラドクスを発見した直後に，公理に関する疑いのある要素は避けられないという観点に到達している。彼のゴールはもはや無条件の確からしさではなく，信じて良いとされる前提から論理的に厳密な方法で算術計算を超えた数学的な確信を導き出すことで達成する安全性なのである。**PM**の計画は大部分，ケンブリッジ大学で1890年代に教えられていた数学のいい加減さと時々の間違いに対する反応であった。「数学の定理に与えられる証明は論理的知性に対する侮辱であった。」とラッセルは書いている[58]。彼らの認識論的な水準からして，ラッセルとホワイトヘッドは高度な数学に対して彼らが適切と感じ，要求するのが妥当であるような確からしさの度合が不足した体系で妥協せざるをえなかった。還元公理はもしそれを仮定しなければあったはずの確からしさを**PM**の初版から奪い取り，還元性をはずした第2版は古典的な実数解析を導くには弱すぎるのであった。さらにその上，無限公理は根拠がなく，それと同時に自然数の理論にとって不可欠なものである。

よって，**PM**が意図したゴールに到達しなかったというのは正しい。しかしそれは数理論理学の発展に多大な影響をもたらし，さらなる基礎づけの仕事への踏台となった。それは特にラムジーの提案の基礎になっている。このことは真理パラドクスについてみたあとで調べることにする。

3 真理パラドクス

ラッセルの真理パラドクス

このパラドクスはラッセルによって初めて発見されたが，彼はこれをクラスパラドクスの一変種とみなしている[1]。このパラドクスのもっともよく知られた型はグレリングのパラドクスとして知られるが，まずラッセルの原型を示すことにする。ある条件はそれ自身について真であり，他のものはそうではない。例えば「x は表現可能である」という条件は表現可能であるが,「x は表現不可能である」は表現不可能ではない。「x はそれ自身について真でない」という条件はどうだろうか。もしそれ自身について真であるとすると，それは「x はそれ自身について真でない」という条件を満たし，それはちょうどそれ自身について真でないといっている。他方，それ自身について真でないとすると，それは「x はそれ自身について真でない」という条件を満たし，これはこの条件そのものであるので，それ自身について真である。

グレリングのパラドクスは次のようなものである。ある形容詞は自身を記述し，他のものは記述しない。例えば「多音節の (polysyllabic)」は多音節であるが「単音節の (monosyllabic)」は単音節ではない。自分自身を真に記述するものを**自己同義的**形容詞とし，自身を真に記述しないものを**自己異義的**形容詞とする。図式としては任意の形容詞 ξ について，

「ξ」は「ξ」が ξ であるときそのときに限り自己同義的,
「ξ」は「ξ」が ξ でないときそのときに限り自己異義的

となる。二番目の図式において ξ を自己異義的で置き換えると矛盾が生じる[2]。

ラッセルのクラスパラドクスとの類似性は明白であろう。「x は y の要素である」という関係の代わりに「y は x について真である」，または「y は x を真に記述する」とするわけである。自分自身の要素にならないものの集まりの

クラスの代わりに「x はそれ自身について真である」または「x はそれ自身を真に記述しない」を得る。これらのパラドクスは構造的に同じものである。

拡張されたラッセル流の真理パラドクス

ラッセルの真理パラドクスには無限に多くの拡張版がある。そのようなパラドクスは,「x は x について真である」という条件がそれ自身について真であるかどうかという問いかけから生じる。「x について真である条件 c で，かつ c について x が真であるような条件 c はない」という条件について同様のことを尋ねるときにもまたパラドクスは生じる。この議論は前よりも多少複雑であり，記号による略記を用いないとすぐに道に迷うことになる。そこでこの条件を r とし,「x は y について真である」ことを $x\mathrm{T}y$ と表すことにしよう[3]。すると形式的には r は次の条件になる。

(r) $\forall c\neg[x\mathrm{T}c\,\&\,c\mathrm{T}x]$.

2 つの場合について考える。最初に r は r について真になると仮定する。このとき自明に $\mathrm{rT}c\,\&\,c\mathrm{Tr}$ となる c が存在し，すなわち r 自身である。よって $\forall c[\mathrm{rT}c\,\&\,c\mathrm{Tr}]$ とはなりえない。つまり r は r について真ではない。したがって r が r について真ならばr は r について真ではない。すると $(\mathrm{P}\to\neg\mathrm{P})\to\neg\mathrm{P}$ という論理法則により，(i) r は r で真ではない，が導かれる。次に r は r で真ではないとしてみる。すると r の定義により $\mathrm{rT}c\,\&\,c\mathrm{Tr}$ となるような条件 c が存在する。d をそのような条件としてみる。すると $\mathrm{rTd}\,\&\,\mathrm{dTr}$ である。r は d について真であるから，$\forall c\neg[\mathrm{dT}c\,\&\,c\mathrm{Td}]$ である。しかしこれがすべての c について成り立つから，特に r に対して成り立つ。つまり $\neg[\mathrm{dT}c\,\&\,c\mathrm{Td}]$ であり，これは $[\mathrm{rTd}\,\&\,\mathrm{dTr}]$ という前の主張に矛盾する。こうして r は r で真でないという仮定が否定された。よって r は r で真でないことはありえない。すなわち，(ii) r は r で真である。最後に (i) と (ii) とを合わせると矛盾になる。

さて，任意の正整数 n に対し，r_n を次のように定義する。

(r_n) $\forall c_1\forall c_2\cdots\forall c_{n-1}\forall c_n\neg[x\mathrm{T}c_1\,\&\,c_1\mathrm{T}c_2\,\&\,\cdots\,\&\,c_{n-1}\mathrm{T}c_n\,\&\,c_n\mathrm{T}x]$.

r についての議論は自明に一般化されて，r_n がそれ自身について真であるのはそれがそれ自身について真でないとき，そのときに限るという矛盾が生じる[4]。

よって無限に多くのラッセル流真理パラドクスが存在し,「x は y について真である」を「y は x の要素である」で置き換えると，無限に多くのラッセル流クラスパラドクスが得られる。その議論は形の上では同一である。

うそつきパラドクス

このパラドクスは次のようなものである。「この言明は真ではない」という言明を考えよう。それが真ならばそれがいっているように真ではない。それが真でないならそれがいっているように真である。このパラドクスの別型では問題の文に名前をつけている。

[L] L は真ではない。

「S が真であるのは S のとき，そのときに限る」という図式をあてはめると,「L は真ではない」が真であるのは L が真でないとき，そのときに限るとなる。「L は真ではない」= L だから，L が真であるのは L が真でないとき，そのときに限る。

このパラドクスは古代にさかのぼる。ある型は紀元前 4 世紀のミレトスのエウブリデスによるものとされている[5]。アリストテレスの生徒で，彼の後を継いでリュケイオンの学頭となったテオフラストスは，うそつきパラドクスについて広範囲の書物を著したといわれているが，現在知られている限りではそれはいかなる形でも残されていない[6]。このパラドクスは新約聖書の註釈者たちによって議論されている。聖書のジェイムズ王版において，パウロのテトスへの書簡 (1:12,13) には次のようにある。

> 「彼らの中の一人，彼ら自身の予言者でさえも，クレタ人はつねにうそつきであり，邪悪なけだものでのろまな強欲者であるといった。この証言は真実である。」

考えてみるとこの証言は真ではありえず，それを誤りであると仮定してもパラドクスが生じないことは容易にわかる。クレタ人が「私は今うそをついている」と言ったとき，うそをつくことがだますことを含んでいるとは考えず，真実でないことを言うことと同一視したうえで，彼は本当のことを言ったかどうかについて考えたくなるのも当然で，こうしておそらくはうそつきパラドクスの原型であったであろうものがよみがえらされた。

うそつきパラドクスは驚くほど弾力があり，パラドクスのある変種を防いでも他の変種がそれをすりぬけるのが落ちである。例えば，原型に対するうまい回答の一つは,「この言明は真でない」という文は何ら言明を表さない，というものである。同様に,「この命題は真である」という文によって表現される命題は存在しないといえるかもしれない。しかし，以下の版はこの回答を受け付けない。「この文は真である命題を表現しない」という文を考えよう。この文が意味ある命題を表現しないとすると，それは真であるような命題を表現しない。よってそれがいっていることは真である。しかしそれがいっていることが真であるとすると，それは真であることを何一ついわないのである。よって，それは真である命題を表現するとき，そのときに限り真である命題を表現しない。

「x は真でない」とは異なる条件を命題について考えることによって，類似のパラドクスが得られる。ここでは数学と関係のあるものについて調べることにする。「この言明は証明不可能である」という言明についての以下の証明を考える。それが証明可能だったとしよう。するとそれは真となり，したがって，その内容に注意するとそれは証明不可能になる。よって，それは証明可能でもあり証明不可能でもある。これにより，それは証明可能とした仮定が不合理であったということになる。よってそれは証明不可能である。ゆえに真である。証明終。しかし，この状況は不可能である。我々はちょうどいまその証明に目を通したばかりである。それは証明可能である。しかしそうするとそれは真であり，したがってその内容に注意するとそれは証明不可能となる。よってそれは証明可能でもあり，証明不可能でもある。

拡張されたうそつきパラドクス

無限に多くのラッセル流真理パラドクスがあるように，無限に多くのうそつき風パラドクスが存在する。うそつきパラドクスは次の言明が真であるかどうかを考えることによって生じる。

[A]　A は真でない。

いま，

[A]　B は真でない。 [B]　C は真でない。 [C]　A は真でない。

という言明による3つの要素をもつ鎖を考える。ここでBはCが真でないといっており，CはAが真でないといっている。よってBは，Aが真でないというのは真でないという言明，つまりAは真であるという言明と同等である。しかしAはBが真でないという言明であり，よってAはAが真でないという言明と同等になる。よって3つの要素をもつ鎖がうそつきパラドクスの単一の言明に還元されたことになる。

自然数上の帰納法により，この種の奇数個の要素をもつ循環鎖はその要素すべてに対する無矛盾な真理値の割り当ては存在しないという意味で矛盾している，という議論に拡張することができる。この議論は単純なのでここで述べておく。帰納法の基点は単なるうそつきパラドクスである。

[A_1] A_1は真でない。

帰納法の仮定はこの主張が奇数 $2n+1$ について成り立つというものである。いい換えると，その仮定は以下の鎖が矛盾しているということである。

[A_1] A_2 は真でない。
[A_2] A_3 は真でない。...
[A_{2n}] A_{2n+1} は真でない。
[A_{2n+1}] A_1 は真でない。

さて，$2(n+1)+1$ (すなわち $2n+3$) 個の要素をもつ同様な鎖がやはり矛盾することを示す必要がある。この鎖は A_{2n} のところまではまったく同じであるが，その後次のように続く。

[A_{2n+1}] A_{2n+2} は真でない。
[A_{2n+2}] A_{2n+3} は真でない。
[A_{2n+3}] A_1 は真でない。

最後の2つの要素を調べると，A_{2n+2} は A_1 が真でないことは真でないという言明と同等であることがわかるが，これは A_1 が真であるという言明と同等である。よって A_{2n+2} が真ではないという言明は A_1 が真ではないという言明と同等である。しかし A_{2n+1} は A_{2n+2} が真ではないという言明であるから，A_{2n+1} は A_1 が真ではないという言明と同等である。よって $2n+3$ 個の要素をもつ鎖の最初の $2n+1$ 個の要素は $2n+1$ 個の要素をもつ鎖と同等であり，こ

れは仮定により矛盾を含んでいる。したがって，$2n+3$ 個の要素をもつ鎖もまた矛盾を含んでいる。循環鎖の最初の要素を最後の要素に続くものとみなすことにしよう。すると数学的帰納法により，奇数個の要素をもつ任意の循環鎖でそれぞれが自分に続くものは真でないといっているものは矛盾を含むということが結論づけられる。さらに，これはそれぞれの要素がそれに続くものを真ではないか，真であるかの一方を主張するような任意の循環鎖に拡張でき，もしその中で奇数個の要素が自分に続くものが真でないといっているならそれは矛盾を含むのである[7]。

論理型と真理パラドクス

拡張されたラッセル流真理パラドクスは，命題関数の循環鎖 $\langle x, c_1, \ldots, c_n, x\rangle$ で，それぞれの要素はそれに続くものによって真となるようなものと関係している。(鎖は循環性を示すために同じ要素が始めと終りに表示されているが，これは重複して現れているわけではない。) ラッセルの真理パラドクスは単に $n=0$ のときの特別な場合であり，その鎖は $\langle x, x\rangle$ である。すべての拡張されたうそつきパラドクスは命題の循環鎖 $\langle \mathrm{L}, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n, \mathrm{L}\rangle$ で，それぞれはそれに続くものが真であることを保証するか否定しており，そのうちの奇数個のものが否定しているようなものと関係している。うそつきパラドクスは単に $n=0$ のときの特別な場合であり，その鎖は $\langle \mathrm{L}, \mathrm{L}\rangle$ である。

数学の基礎体系に対して，このような循環鎖に関わることを回避するだけでなく，この点について，その体系が信頼できるような根拠を要求するのは当然のように思われる。これは単純型体系によって達成される。ラッセル流の真理パラドクスに関係する循環鎖は，命題関数の型がその命題関数のどの入力，よってそれを真にするいかなるものの型よりも高いという事実によって排除される。単純型理論においてうそつき風パラドクスに対処するには，命題に対してもまた型が割り当てられなければならない。ここで要求されるのは，各命題は唯一の型をもち，それが名前や引用や特定の記述によって言及するすべての命題の型よりも高いということだけである[8,9]。真理パラドクスに関係しているような命題関数や命題の循環鎖の要素はそれ自身よりも高い型をもたなければならないことになり，これは不可能である。

真理パラドクスは型の体系において防がれるが，型の教義がそれを解決するためのものとみなすべきではない。なぜであろうか。第一に，命題関数や命題の循環鎖すべてを排除するいかなる提案も，同時に意味のあるものをあまりにも多く排除しすぎるということがある。例えば，英語で表現可能であるという条件は英語で表現可能である。よってこの条件は，1 つの要素をもつ命題関数の循環鎖の最初であり最後である。今度は，次のやりとりを考えよう。

ムーア：あなたが述べようとしている言明は私について述べている。
ラッセル：あなたがたった今述べた言明は私について述べた。

型の考え方によると，これらの発言は見かけによらず命題を表現しない。もし一方が命題を表現するなら両方とも表現しているはずであり，もしそうであるなら，それぞれの命題は他方について述べているので，これらは 2 つの要素をもつ命題の循環鎖を構成している。しかし，このやりとりにおいては両者とも真実を述べており，よって，その発言は真な命題を表現していると考えるのはもっともなように思われる。これは確かではない。これらの発言が命題を表現しているという直観はくつがえしうる。しかし，命題ではなく文について述べるような同等のやりとり (「あなたが言おうとしている文は...」など) に交換するのは容易である。(もし型の体系がある種のうそつきパラドクスを防ぐようになっているならば) 文はそれが言及しているものよりも高い型をもつので，型の考え方によれば，発せられる音は文の発話ではありえないのである。このことは信頼性を相当にねじ曲げることになる。

疑いの二番目の理由はクリプキが指摘した点による[10]。言われたことを本質的にゆがめられない限り，うそつき風のパラドクスは偶発的に起こりうる。クリプキの例はこうである。ジョーンズが

(A) ウォーターゲートについてのニクソンの声明のほとんどは正しくない。

と言ったとしよう。加えてウォーターゲートについてのニクソンの声明は，次のニクソンの声明を除いて真と偽とに均等に分けられているとしよう。

(B) ウォーターゲートについてジョーンズの言うことはすべて正しい。

最後に，A がジョーンズのウォーターゲートについての唯一の声明としよう。このパラドクスが論理や言語の規則に対する違反ではなく，ここに述べた状況

の偶然性に起因するとしても，この状況がパラドクスを生み出していることをみるのは難しくない。このパラドクスは，型の不適合によってＡとＢが意味をなさないと考えることによって解決することはできない。よって型の考え方に解決を期待するべきではないのである。うそつき風のパラドクスに対して提案されている解決法で，型の考え方よりも制限の少ないものが多くあるので，悲観することはない。

型の体系が許される推論のすべてをとらえきれないという点において型の考え方は制限が強すぎる。しかしこれは，型の体系が厳密すぎてすべての確立された数学をとらえられないことを意味するわけではない。単純型理論は分岐型理論より柔軟性があり，表現力が強いにもかかわらず，真理パラドクスとクラスパラドクスを循環鎖の登場を避けることによって防ぐ頑強さがある。単純型理論を数学の基礎体系として真剣に考慮することの正当な理由がこれである。こういうことをまさにラムジーが提案している。数学の基礎に対する彼の考えが次章の主題となる。

4

論理主義を救うラムジーの試み

ちょうど『プリンキピア・マテマティカ』の第2版の第1巻が出版されたとき，当時たった22歳の哲学者かつ数学者であったフランク・ラムジーは数学の基礎に対する彼自身の見方を発表している[1]。ホワイトヘッドとラッセルによる純粋数学の真理は論理の真理であるという点に同意しながら，彼は単純型理論を基礎的な体系として採用し，これによって階数制限から起こる障害を避けることを提案している。これらの見方は，この話題に関する重要論文『数学の基礎』[2]において精密化され擁護されている。

この章では，まず基礎的体系においては階の区別を無視してかまわないというラムジーの主張に対する彼自身の弁明について考察し，そして純粋数学は論理であり，単純型の体系において実現されるという彼の主張の論拠について考える。

ラムジーによる論理と言語パラドクスの区別

ラムジーは，パラドクスを論理的なものと言語的なものの2つのグループに分けた[3]。彼は特に8つのパラドクスについて述べている。論理的パラドクスのグループには，ラッセルのパラドクス，ブラリ・フォルティのパラドクス，そしてここまでには紹介していないパラドクス，すなわち2つの関係について両者の間に1番目の関係が成立していないということで定まる関係，を入れている。このグループには，すべてのクラスパラドクスを含めることができる。というのは，ラムジーいわく，「それらはクラスや数といった論理的あるいは数学的な言葉のみを含む」からであり，よってそれらは間違った論理や数学に起因するものにちがいないのである。2番目のグループには，定義可能性パラドクス，グレリングのパラドクス[4]とうそつきパラドクスを入れている。これらの

パラドクスは，すべて思考や言語についてのなんらかの言及があると主張されている。もしそれが思考や言語に対する誤った考えによるものならば，それは論理や数学には関係しないであろうとラムジーはいい，さらに進んで，それらは「意味する」や「名づける」や「定義する」のあいまいさに依存し，これは明らかに言語の誤りであると論じている。

ラムジーによるパラドクスの分類は広く受け入れられることになるが，注意すべき点がある。いくつかのパラドクスは言語学的な用語に依存しているが，それによってそれらのパラドクスが論理的ではないといえるわけではない。というのは，言語には論理的な側面があり，論理的でない側面のみが言語的パラドクスに関係しているかどうかは明らかではないからである。例えばグレリングのパラドクスは，表現が真にあるものを記述するという概念を本質的に含んでいる。この概念が言語的であるとみなしても，それが論理的な概念ではないというのは明らかではない。このパラドクスがこの概念にかかわっているならば，それは結局，論理的パラドクスであるかもしれないのである。これに答えてラムジーは,「論理」の相異なる意味を混乱することに警告を発している。言語パラドクスは「思考の解析」という意味での論理の事柄と関係していることを彼は認めているが，数学が論理の一部であるという意味で，すなわち「記号体系」としての論理には関係していないとしている[5]。ラムジーの考えでは，パラドクスは純粋に形式的あるいは記号的な方法で述べることができ，その誤りを形式化された議論にのせることができるとき，適切な意味で論理的であるということのようである。しかし，もしこれがラムジーの基準であるならば，グレリングのパラドクスは論理的パラドクスである。というのは，それが (クラスに関する) ラッセルのパラドクスと同じ方法で形式化でき，同じ形式的誤りが見いだされるからである。すなわち，関係 R に対して

$$\forall y[y\mathrm{R}e \leftrightarrow \neg[y\mathrm{R}y]]$$

となるもの e が存在すると考える。ラッセルのパラドクスでは「$a\mathrm{R}b$」は「a は b の要素である」の形式化であるのに対し，グレリングのパラドクスでは「a は b によって真に記述される」の形式化である。グレリングのパラドクスはラッセルの真理パラドクスの変形であり，ラッセルのパラドクスは彼のクラスパラドクスに非常に似ていることから，ラッセルはそれらを同じパラドクスの変形

とみなしていたほどであった[6]。それ以降，複数の人たちがうそつきパラドクスをラッセルのパラドクスと同じ形式的枠組において取り扱っている[7]。このような関連は他の所でもみつけることができる。前章において指摘したように，拡張されたうそつきパラドクスは拡張されたクラスパラドクスと形式的に同じであり，どちらの場合も基本的な誤りが所在すると思われる同一の形式的な特徴をみつけることが可能である。これらの事実は，ラムジーによるパラドクスの分類について疑問を投じているが，これが数学の基礎に対するラムジーの研究法に打撃を与えることはない。ラッセル流の真理パラドクスはラッセル流のクラスパラドクスと形式的に同じであるから，それらはまた型を制限することによって防ぐことができる。これがうそつきパラドクスとその拡張にも適用できることは前章でみたとおりである。よって，真理パラドクスは論理的パラドクスであるというように譲歩したとしても，単純型理論は階数に注意することなしに数学の論理的基礎となりうる，というラムジーの見解は居住権を失うことはないのである。

定義可能性パラドクスについてはどうだろうか。階数は無視できるというラムジーの提案は，基礎体系となる単純型理論がそれらのパラドクスをつくり出さないというときにのみ受け入れられる。適切な基礎体系はパラドクスの表現そのものを妨げるような特徴を取り込んでいる必要はなく，表現可能などんなパラドクスもその体系では正当化されないような前提，あるいは段階をもっていれば十分である。このことについては確信できる理由がある。定義可能性パラドクスは，ある言語における定義可能性を表現する述語で，その述語自身もその言語で表されるものを必要とする。数学の基礎体系は定義可能性述語を必要としない。そして定義可能性述語が存在したとしても，それはその言語に対して普遍的である必要はない。定義可能性述語は，レベル n の定義可能性のための述語を含む定義述語がそれより高いレベルになるような方法で階層化されていれば型の体系と矛盾しない。よって，型の体系は階を含まなくても，定義可能性パラドクスを生み出すことをおそれる理由はないのである。

非可述性は受け入れられるか？

ラムジーは後のラッセルと同様，還元公理には根拠がないと感じていた。しかしラッセルが失望したのに対して，ラムジーはこの公理は必要ないと主張した。それは階の体系によって課せられる障壁を避けるために考案されたものであり，階の体系は非可述的表現を排除するべく導入されたのである。しかしながら，非可述的表現は受け入れてもよいとラムジーは主張した。非可述性を禁ずることはパラドクスに対する過剰反応なのである。たったいま示したように，数学の基礎体系において扱わなければならないパラドクスは単純型理論によって防ぐことができるし，他のパラドクスはこの体系に影響しない特別のものさしによって扱われるのである。

しかしながら，非可述的表現はそれらの導入がただちに矛盾を引き起こさない場合でも，完全に支離滅裂であったり，理解し難いものであるという可能性はある。ラムジーは，非可述的表現に含まれる循環は循環論法ではないと主張した。R を個体上の命題関数 φ と個体 x の間の関係で，「φ であることが偉大な将軍に必要なら，x は φ に欠けている」のようなものとする。階の制限がない場合，全称量化詞を適用して，個体上の命題関数「すべての φ について φRx」が得られる[8]。いま用いた例に応用してみると，「x は偉大な将軍に必要とされるすべての φ を欠いている」が得られる。このように定義された命題関数は定義で言及されている命題関数 φ の全称のうちのひとつになるので，これは循環論法であると推定される。しかし，ラムジーはそうではないと次のように主張した。量化詞は無限の連言結合と同じように解釈される。すなわち，「すべての φ について φRx」は無限に続くかもしれない列「$(\lambda y Fy)Rx \,\&\, (\lambda y Gy)Rx \,\&\, (\lambda y Hy)Rx \,\&\, \cdots$」と同じ条件のもとで (個体 x について) 真であると考えられる。ただし，個体上の命題関数を表す項はすべてこの列の構成要素のどれかの R の左に現れるものとする。「すべての φ について φRx」で表される命題関数をそのように考えるなら，これはその構成要素の一つの左辺として現れなければならない。というのは，それ自身個体上の命題関数だからである。これはもちろん循環しているが，「$Fx \,\&\, Gx$」は「$Fx \,\&\, Gx \,\&\, (Fx \,\&\, Gx)$」と同じ条件の下で真であるという程度のものだとラムジーは主張している。

この弁明は巧妙なものではあるかもしれないが，それは命題関数がかかわる

ところでは機能しないのではないかと思う。第 III 部の第 1 章で循環論法原理について調べたように，偉大な将軍に必要とされるすべての属性をもつという属性もどきは，偉大な将軍に必要なすべての“1 階”属性をもっていることであると理解しておかないと，とりとめもないものになる。しかしながら，クラスに関しては非可述的な仕様はまったく問題ない。例えば，もっとも生息密度の高い昆虫類というクラスを特定できるだろう。知識がなくてそれを他の方法で定めることができないとすれば，これは非可述的な仕様である。非可述性を避ける能力がない原因は重要ではない。つまり，クラスを非可述的に特定することは，それを他のどんな方法でも原理的に定めることができなかったとしても，可能である。除外すべきは，その要素が我々の陳述に依存するような特別な場合である。

命題関数とクラス

このような理由により，階の区別を無視し，非可述的定義を許可するというラムジーの提案を受け入れるかどうかは，彼の体系における個体以外のものがクラスであるか命題関数であるかということに依存する。このことは簡単ではない。古典的な数学は，共外延的な命題関数たち (すなわち，同じものに対して真になるもの) を区別する必要がないという意味において外延的であるので，命題関数ではなくクラスが数学の基本要素であるとして話をするのが非常に便利である。しかし論理主義は，数学が特定の領域に関するものではないことを要求する。数学がクラスについてのものである限り，クラスは命題関数の外延以上のものであってはならず，よってクラスについての言及は命題関数について語る方法として解釈されうるのであって，これはいかなる種類の推論についても本質的な事柄である。これがラッセルとホワイトヘッドの要点であった。しかしここでラムジーはある問題に気づいた。クラスが命題関数の外延であるときそれを「定義可能である」とよんで，彼はホワイトヘッド–ラッセルの考えに以下の言葉で反論した。

> 「定義不可能なクラスが存在するかどうかは経験的な問題であって，どちらの可能性も完全に受け入れられる。実際，すべてのクラスが定義可能であったとしても，論理の本質である先験性と必然性を破壊することなしに，通常の論理ではクラスが定義可能なクラスであることを判断できない。」[9]

「クラス」は「定義可能なクラス」を意味するのではなく,「外延的関係」(「順序対のクラス」) は「定義可能な外延的関係」を意味するのではないとラムジーは指摘している。彼はこのことを部分的定義，つまり2つのクラスが同じ基数をもつのはそれらの間に1対1の対応関係が存在するときであること，を用いて例示している。明らかにこれが意味しているのは，1対1に対応づける2変数の命題関数が存在するということではなく，単にそれらの要素が対にされるということである。一般に数学では，クラスの要素たちがある共通の特徴をもっていたり，ある共通の条件を満していることは要求されない。「外延における定義不可能なクラスや関係の可能性は現代数学の外延重視の姿勢における本質的な部分である」とラムジーはつけ加えた。彼は乗法公理と関連づけてこの見方をさらに強く支持した。この公理は，どの2つも交わりをもたない空でないクラスからなる (おそらくは無限の) どんなクラス c に対しても，c の各要素とちょうど1つの共通要素をもつクラス d が存在するという主張である。考えてみると明らかに思われるが，定義可能なクラスに制限するときわめて疑わしい。というのは，そうだとすると c のすべての要素中のちょうど1つのものについて真である命題関数が存在しなければならないが，これには信ずるべき根拠がないからである。

すなわち，ラムジーは論理主義の中心には明らかにつじつまのあわないことがあることを示した。一方で，論理主義によってクラスは命題関数の外延以上のものでないことを要求されているが，他方では，あるクラスはどんな命題関数の外延でもないという論理的な可能性を与えるべきである。ラムジーはこの緊張状態に気づいていたが，そのことをそれほどきちんと述べてはいない。彼の解説では，このことは同一性の考察と関わっているが，それについてはここでは深入りしない。しかし，彼にはその解決になると考えていることがあった。彼は命題関数の概念をゆるめることを提案したのである。ラッセル流の考えでは，命題関数 $\lambda x\varphi(x)$ の入力 a と b に対する値は命題関数 $\varphi(a)$ と $\varphi(b)$ である。そこでは a と b が言及され，同じ条件を割り当てられる。すなわち，$\varphi(a)$ は a について，$\varphi(b)$ が b についていっているのと同じことをいわなければならない。ラムジーはこれを命題関数であるための条件から完全に除くことができると提案した[10]。いかなる命題値関数もその入力の領域が単一の型のすべての個体からなっているなら，命題関数とみなされるべきである。この考え方に

おいて，命題関数とは，与えられた型の個体へまったく任意に命題を割り当てるものとなりうる。入力が個体であるような関数は，それぞれの個体に単一の命題を割り当ててさえいれば命題関数となる。よって

$$f(\text{フェルマー}) = \text{種は進化するという命題},$$

かつ

$$f(\text{ガウス}) = \text{地球はまわるという命題}$$

となるような命題関数 f が存在する。クラスとは，与えられた型の各個体にトートロジーか矛盾のいずれかを割り当てる関数であるとラムジーは定めた。クラスの要素は，トートロジーを割り当てられた個体とする。クラスを定める関数は，入力のトートロジーまたは矛盾への完全に任意な割り当てとなりうるので，クラスは命題関数によって与えられるという論理主義者の要求は，クラスが何であるかということに対していかなる制約も与えない。ラムジーの考えでは命題関数は定義されないものでもよく，よってクラスもまた定義されないものでもよい。

こうして，ラムジーは論理主義者のジレンマから免れたように思われる。しかしこれは錯覚である。数学が特定の対象についてのものでないならば，そのクラスは条件の外延以外であってはならず，条件は論理に属している。というのは，量化詞に依存するどんな演繹的推論も条件，つまり述語で表される項目に依存しているからである。しかしラムジーの考えでは，命題関数はもはや条件に理論的な面で対応するものではなく，2 変数の命題関数は関係に対応するものではない。任意の命題値関数を論理的対象物とすることは，任意のクラスを論理的対象物と定めることと同様に正当性がなく，論理とのつながりは失われている。

しかし，命題関数の範疇を自由にすることで論理主義を存在論的ジレンマから救えないのであれば，それは非可述性を受け入れるラムジーの見解の助けになる。正確にいえば，自由化された考えにおける命題関数は属性や条件ではなく，しかし反対に思考や言語から独立であるため，前にあげられた非可述性についての問題はもはや適用されないのである。

数学は論理であるという提唱

確かに論理主義には，クラスが条件や命題関数の外延であるというラッセルの主張以上のものがある。実際，論理の概念を自由化して，ラムジー流の命題関数の理論，あるいは同じことであるが，(条件の外延であってもなくてもよい) クラスの理論を含むようにすれば，論理主義はその主張なしですませることができる。そのように理解されたクラスは特別な対象であるが，これで生じる理論の応用には制限がない。というのは，すべてのもののクラスが存在するからであり，よって論理の一般性は守られる。これが筆者の考えるところのラムジーの見方であり，それは数学は論理であるという提唱をさらに探究するためのものであるとみなせるだろう。

ラムジーはその提唱を維持し，当時その代替のものとして提出された (と彼が考えた) ものとそれを好意的に比較した。しかし，誰もその提唱に適切な解釈を与えてはいないと彼ははっきりと感じていた。『数学の原理』においてラッセルは，論理的真実は変数と論理定数のみによって表すことができるかのように書いており，よって論理は話題に対する中立性があるとしているが，この見方に対しては,『プリンキピア・マテマティカ』の初版の時点では何ら修正が表明されてはいない。純粋に論理的な言葉で表現される真な命題が論理的真実でないかもしれないということを，ラッセルは『数理哲学入門』において初めて考察するまで認めなかった[11]。ラムジーは任意の 2 つの個体が少なくとも 30 通りの方法で異なるという主張を例として与えた。これはまず真であり，(等号が論理定数なら) 論理的な言葉で表現されるが，それでも論理的真実とはいえないだろう。偶然的真実なのかもしれない。

一度この点に気がつくと，真実が論理的な真実となるとはどういうことであるかについて，論理主義には何らかの説明が必要であることが明白になってくる。ラムジーはウィトゲンシュタインの提案を採用した。これはいくつかの論理的な用語を導入することで簡単に説明することができる。原子命題とは単純な主語述語命題 F(c) で，c は主語を F は述語を表すもの，例えば「私は考える」とか「それは光る」によって表されるようなものや，あるいは関係命題 R$(c_1, \ldots, c_n)$，例えば「メアリーがトムと出会ったときマイクはメアリーの倍の年である」のようなものである。原子命題は，以下のようにして他の命題の“構成物”にな

りうる。ある命題が原子命題 F(c) を構成物とするというのは，それが F(c) と他の命題から真理関数的作用素あるいは結合子によってつくられるときで，例えば，$\neg$Q $\rightarrow$ (F(c)&R) の形の命題におけるような場合である。F(c) は「ある x について F(x)」や「すべての x について F(x)」といった量化命題の構成物でもあり，またこれらの量化命題を成分とする命題の構成物でもある。これらが，原子命題が他の命題の構成物となるすべての方法である。最後に，ある命題が**トートロジー**であるとは，その原子構成物への真理値の割り当てすべてに対してそれが真になることをいう。ここで原子命題たちは独立である。すなわち，それぞれは他のものの真理値にかかわらず，どちらの真理値をもとることができると仮定する。完全に一般的なトートロジーは論理的真実である，というラムジーの仮定はきわめて妥当である[12]。彼の見解では，論理主義の任務とは，数学的真実は完全に一般的な真実であることを示すことであった。

このゴールは到達可能であるとラムジーは考えていたが，乗り越えるべき困難が一つあると考えていた。その問題は，ラムジーがウィトゲンシュタインから教えられた等式に関するかなり怪しげな見解によるもので，その見解を捨てれば，この困難はたちどころに消滅する。驚くには値しないが，本当の困難は，まったく論理的真理にはみえない 2 つの公理，すなわち乗法公理と無限公理に関わるものなのである。

ホワイトヘッドとラッセルのように,「クラス」は「定義可能クラス」を意味するものとするならば，乗法公理は正当化されない，とラムジーは確信をもって論じている。ラムジーはいったん定義可能性の制限が除かれれば，この公理は明らかなトートロジーであると議論なしに主張している。これについてみてみよう。再びこの公理を述べると，どの 2 つの要素も交わりをもたない空でないクラスの (おそらくは無限の) クラス c に対して，c の選択集合，すなわち c のそれぞれの要素とちょうど 1 つの要素を共有するクラス d が存在する，というものであった。この公理がいっていることを完全に理解すれば，それは自明なものになるとラムジーはいっている。この公理が自明だとしても，それがトートロジーかどうかはまったく明らかではない。もしそれがトートロジーであるなら，我々はこのことをその構造と成分の真理条件を把握することによって認めることができるはずである。例えば「$\varphi(x)$」を任意に固定した述語としよう。「[すべての x について $\varphi(x)$]$\rightarrow \varphi(c)$」は，その前提の真理条件を考えることに

よってトートロジーであることが以下のようにわかる。すなわち，「すべての x について $\varphi(x)$」が真になるのは，「$\varphi(x)$」のすべての代入例が真になるときに限る。「$\varphi(c)$」は一つの例であるから，もし結論「$\varphi(c)$」が偽であれば前提は偽となり，このとき条件節全体は真になり，もし結論「$\varphi(c)$」が真ならば条件節全体はやはり真になる。よって命題全体は，その原子構成物にどんな真理値が割り当てられたとしても真になる。すなわちそれはトートロジーである。これほど簡単な話は乗法公理にはいえない。というのは「すべてのクラス c に対しある d が**存在して** $\cdots$」のような存在に関する部分があるからである。しかしながら，もし (型に制限した) クラス抽象原理がトートロジーであるなら，ラムジーとウィトゲンシュタインの説明によると，全称存在型のトートロジーが存在する。型の表示をはぶくと，クラス抽象原理は次のようになる。

すべての x について $x \in \{x : \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(x)$.

いま，乗法公理のように全称量化詞ではじまり，存在量化詞が続く次のような命題を考える。

すべてのクラス b と c に対してあるクラス d が存在して，すべての x について $x \in d \leftrightarrow (x \in b \,\&\, x \in c)$.

これが真になるのは，以下の命題のすべての代入例が真になるときである。

あるクラス d が存在してすべての x について $x \in d \leftrightarrow (x \in b \,\&\, x \in c)$.

これはさらに次の命題のある代入例が真であるとき真になる。

すべての x について $x \in d \leftrightarrow (x \in b \,\&\, x \in c)$.

真である例は次のもので，これは仮定によりトートロジーとなる。

すべての x について $x \in \{x : x \in b \,\&\, x \in c\} \leftrightarrow (x \in b \,\&\, x \in c)$ [13].

乗法公理が真であることは，このやり方でクラス抽象原理を使って示すことはできない。というのは，一般には選択集合を定義する命題関数をみつけることはできないからである。もちろんもし可能なら，乗法公理を公理のうちに入れる必要はなく，クラス抽象原理があればよい。その原理があってもなくても，乗法公理がその原子構成物への真理値の割り当てすべてに対して真になることを示すことはできないし，それ以外にそれが真であることを論理的構造から決定

できるとみなす道理はない。このような理由により，それを論理的な意味においてトートロジーとすることはできないのである。

ラムジーは,「数学のほとんどは乗法公理と独立である」といっている。それをなくしても解析学の大部分は残るが，超限基数の比較可能性を証明することはできなくなる。しかしこれらの事実は我々の関心とはさほど関係がない。その公理の数学への貢献が大きくても小さくても，ラムジーははっきりとそれを自明な真理とみなしている。そしてそれは明らかに数学的真実であるので，すべての数学的真実がトートロジーであるということを受け入れることはできない。

型理論において，無限公理は無限に多くの個体が存在することをいっている。もし有限個の個体しかなければ，個体のクラスも有限個しかなく，すべての型 n に対して型 n のクラスが有限個しかなければ，型 $n+1$ の個体も有限個しかないので，無限個のクラスを含む型が存在しないことになる。そうすると，自然数をあるひとつの型で表すことができなくなり，さらにその体系において任意の実数を表すことはできなくなる。したがってこの公理は不可欠である。しかしながら，有限個の個体しかないと主張することには自己矛盾はないので，無限にあるという主張は論理的真実になりえない。ここでラムジーは，その主張はトートロジーか矛盾かにならねばならないという「ウィトゲンシュタインの深遠な分析」に従っている[14]。これについての議論は，少なくとも 3 つの個体が存在するという命題がトートロジーか矛盾かになるという議論と同じである。後者のほうが容易に述べられるので，それを示すことにする。この主張は，異なっているという 3 つの主張の連言を存在的に一般化した

ある x, y, z について $[x \neq y \,\&\, y \neq z \,\&\, z \neq x]$

である。これは括弧内の論理式がトートロジーとなるような代入例があるときトートロジーになる。そして，括弧内の論理式のすべての代入例が矛盾であるとき矛盾になる。いま，a と b が異なる対象であるなら，それらは必然的に異なっており，よって $a \neq b$ という主張はトートロジーである。それらが同一のものなら異なっていることはありえず，$a \neq b$ という主張は矛盾である。よって，括弧内の論理式の真となる代入例はトートロジーの連言となり，それゆえそれ自身もトートロジーである。他方，偽である代入例は，矛盾である構成要素をもち，よって矛盾となる。いま，もし主張全体が真なら，括弧内の論理式

は真の代入例をもち，よってトートロジーの代入例をもつから，全体もトートロジーである。もし主張全体が偽ならば，括弧内の論理式のすべての代入例は偽であり，よって矛盾であるので，全体も矛盾である。その主張が真か偽かであれば，それはトートロジーか矛盾かのいずれかである。この議論を無限公理に拡張すると，異なっているという主張の無限の連言の存在的な一般化であるかのように扱うことができる。

これが誤まっていることは明らかである。すなわち，「$a \neq b$」という異なっていることの主張は，トートロジーであることなく必然的な真実であるか，または矛盾であることなく不可能でありうるのである[15]。しかしこのことをおいても，ラムジーは無限公理がトートロジーあるいは矛盾であるという結論で何をしたのであろうか。彼は実解析は矛盾しているという見方を望まないかぎり，その公理をトートロジーとみなさなければならないといっている。これは敗北である。解析が単に誤りではなく矛盾するという理由づけは数学が論理であるという主張とは相入れず，それはラムジーを満足させるものではなかった。

数学の基礎としての単純型理論

結論の前に，単純型理論が数学の基礎的体系として妥当であるかについて考えたいと思うが，これは論理主義の評価と大きく関係している問題である。古典的な数学，特に実解析は単純型理論において表現することができる。しかし単純型理論の基礎的体系としての妥当性は，その表現の認識しやすさと概念的自然さに依存する。認識しやすさについては無限公理を考えればよい。実解析が収まるようなどんな基礎的体系もある型の無限公理を要求する。型理論においては，個体，すなわち単独の非数学的対象物の個数についての主張を要する。しかし，個体の個数に依存するのは奇妙である。数学はたった有限個の個体しかない世界において誤りとなりうるのだろうか。個体の数にかかわらず，無限個の素数が存在する。我々の数学に対する確信は個体の数が有限かどうかということについての見方に左右されるべきではない。これを決定するには，我々の観点は物理学，とりわけ宇宙進化論に依存しなければならず，そしてその観点は無限集合や列の存在を含むかなり多くの数学に依存するであろう。

型理論において数学を表現することの自然さを調べるために，基数の扱いに

ついてみてみよう。というのは，非常に多くのものがその上に築かれるからである。フレーゲに従って，ラッセルは基数 κ とはちょうど κ 個の要素をもつクラスたちのクラスであると論じた[16]。これは奇妙なように思われるかもしれないが，ある領域が何らかの特性のスペクトル (例えば形や構造) によって分類されるとき，スペクトルにおけるそれぞれの特性を，それをもつ要素クラスで表現するのはきわめて一般的なことである。いまの手続きは領域が制限されているときはうまく働き，この場合には，基数の属性についてのそれなりの翻訳を与える。例えば「1 と 6 の間の素数の個数は 3 である」は「1 と 6 の間の素数のクラスは 3 つの要素をもつクラスたちのクラスに属する」となる。しかしこの手続きには問題がある。ひとつには，この手続きは要素であることについての循環鎖を認めている。例えば，3 は 1 と 6 の間の素数のクラスに属し，そして (要素は 2,3 と 5 のみである) このクラスは，3 つの要素をもつクラスたちのクラス，すなわち 3 に属する。型理論での修正は，基数 κ を (もっとも低い型を除く) それぞれの型に対して 1 つずつ無限の集まりで表現することである。個体のクラスについては，数 3 は 3 つの個体要素をもつクラスすべてのクラスであり，一般に型 n のもののクラスの基数 κ は，型 n のものを κ 個要素にもつクラスすべてのクラスである。型 n のもののクラスの基数は型 $n+2$ のクラスである。よって，数の型を下付き文字で表すと，3 つの個体要素をもつクラスの基数は 3_2，個体のクラスを 3 つ要素にもつクラスの基数は 3_3 などとなる。3_n は 1_n と 6_n の間の 素数 $_n$ のクラスに属するが，このクラスは型 $n+1$ であり，3_n ではなく 3_{n+2} に属する。よって循環性は避けられたが，対価を払うことになる。水星，金星，火星のみから成るクラスは 2_7，3_7，5_7 を要素とするクラスと同じ数の要素をもつ。このことは単純型理論では正しくない。つまり，前者のクラスは (型 2 のものとして) 基数 3_2 をもつが，後者は基数 3_9 であり，それらはまったく異なるものである。3_2 と 3_9 の間には 1 対 1 の関係さえ存在しえない。一般に，κ 個の要素をもつクラスが共通に有するものが何であるかを単純型理論でとらえることはできない。

この基数の細分化は，型理論による基数の説明が有する概念的な欠陥である。他にも欠点がある。与えられた型 n に対する数 κ が何になるかということは偶然的な事項であり，それはちょうど来週の宝くじの当選者を確定するようなものである。プラトンの両親が出会っていなかったらソクラテス，プラトンと

アリストテレスを要素とするクラスは存在しなかったし，よってこのクラスを要素とするクラスも存在しなかったのである。この説明において基数 3_2 となるクラスは存在せず，代わりに他のあるクラスが基数 3_2 であったであろう。同じことが，$\kappa \geq 1$ かつ $n \geq 2$ のときすべての κ_n について成り立つ。これはもちろん奇妙である。零については別な形の奇妙さがある。正の型それぞれに対して異なる零が存在し，それぞれの場合においてこれは空クラスのみを要素とするクラスとなる。それぞれの型について異なる空クラスが存在するので，これらの零は異なるものである[17]。これは直観に反している。というのは，それらはすべて空のものなので，これらのクラスをその要素によっては区別できないからである。型理論における基数の表現のこれらの特徴は概念的に扱いづらいものであり，基数に対するより自然な表現法が存在するかどうかが急務の課題となった。数学的な欠陥も存在する。混合型が禁止されているので有限の型の和をとって最初の超限型をつくることができず，これによって超限基数の存在を証明することは不可能になる。

結　論

ラムジーの執筆当時，論理主義に取って代わるものは，算術の単純な応用にも融通の利かない形式主義的観点や，多くの古典的解析と相入れない構成主義的観点であると彼には写っていた。しかしもし論理主義がラムジーの好んだ選択であったとしても，彼はまさに『プリンキピア・マテマティカ』の初版で示された論理主義の説明には満足していなかったし，循環論法原理のために古典的な解析を犠牲にするような第２版を引き継ぐことにも満足しなかった。主な弱点を克服するため，彼は数学の対象物は外延的であり，思考と言語から独立であるとみなすことを提案した。私の判定ではこれは正しい方向への大きな歩みであったが，その結果はまだ満足いくものからはほど遠かった。型理論による数学の表現は概念的に不適切であり，型理論の制約は意味づけについての無理な教義に基づいている[18]。ラムジーは論理主義を循環論法原理と還元公理をとりまく泥沼から救い出すことに成功したが，その防御には失敗した。クラスを条件の外延とする論理主義の考えと，定義不能クラスに対応することの必要性の間との軋轢を克服するという彼の試みは成功せず，本質的には論理主義の考

えの放棄となった。数学的真理はトートロジーであるというテーゼによって論理主義を再構築し強化すれば，乗法公理はどんな形においてもますます明白な反例となった。そして無限公理は，それが型理論においてとるべき形では“先験的”[19]でも必然的でもなく，トートロジーというのは論外である。

ラムジーは論理主義を守るためにかなりの創意工夫を施したにもかかわらず，彼は完全に幸福にはなれず，ある点においては自分の試みが「あいまいで不満が残る」と素直に認めている。しかしどんな人にも彼以上のことができたとは思えない。もともと望みがなかったのである。その著述により彼はラッセルの見解を追い越すのみでなく，実は論理主義の限界にまで到達していた。非常に若かったにもかかわらず，当時数学の基礎について研究していた他の誰にも劣らない哲学的に鋭さをもっていた。彼がラッセルの半分ほども生きていれば，論理主義を捨てて，古典的な数学の枠組を型理論から公理的集合論に移行していたかもしれない。これは次の章の主題となる。

第 IV 部

公理的集合論と
ヒルベルトのプログラム

1 ツェルメロの公理的集合論

ラッセルとホワイトヘッドが『プリンキピア・マテマティカ』の初版を準備していたちょうどその頃，ツェルメロはカントルの集合論を型による制限を用いないで公理化しようとしていた。その成果は1908年に出版された独創的な論文の中でまとめられている。この一連の研究は，集合論のパラドクスの解消を目的としていた。集合論は，数学にとって不可欠の部分であるにもかかわらず,「この学問の存在そのものが，ある種の矛盾ないし“二律背反”に脅かされており，その矛盾は我々の思考を必然的に律しているように思われる原理から導出され，それに対する十分に満足のできる答えはまだみつかっていない」とツェルメロは述べている。

満足のいく解決を得るには，外延としての集合概念の代わりに，問題のある原理を生じないような別の方法の提示が必要であろう。当時ツェルメロは，そのような代わりの概念はまだみつかっていないことを率直に認めていた。この状況で，どのようにして集合論の公理化が行われたのだろうか。ツェルメロは次のような二段階の計画を立てた[1]。

まず最初に，集合論本来の役割を保つべく，算術や解析を展開するのに十分豊かであり，同時に，パラドクスを再び引き起こさないほど十分厳密であるように公理を形式化する。次に，この公理がいかなるパラドクスも引き起こさないこと，つまり公理が無矛盾であることを証明する。ツェルメロの1908年の論文は最初の段階を達成した。

ツェルメロの公理

パラドクスが発見される以前は，外延性原理と内包性原理がクラスに対する考察において主要な原理だった[2]。外延性原理とは次のものである。

> クラス A, B がまったく同じ要素をもつならば，A は B とまさに同じクラスである。

外延性は，クラスの要素であることとある概念に属することを区別するものである。「奇数」の概念と「偶素数の倍数ではない整数」という概念は同じではない。しかし，それらに属するものは一致する。この原理はツェルメロにおいても維持され，その後あらゆる集合論において用いられている。ツェルメロは，パラドクスの原因となる誤りとして，内包原理を退けた。

内包原理とは次のものである。

> 任意の条件 F に対して，F を満たすもの全体のクラス $\{x : \mathrm{F}(x)\}$ が存在する。

ツェルメロの関心は，カントルのいう絶対無限多数 (AIM) を含むクラスの理論ではなく，むしろ集合論にあった。したがって，彼が否定したのは集合に関する次の内包原理である。

> 任意の条件 F に対して，F を満たすもの全体の**集合** $\{x : \mathrm{F}(x)\}$ が存在する。

内包原理の代わりに彼が提案したのは，この原理を制限して得られる分出公理である。

> 任意の集合 m と m で確定的な任意の条件 F に対して，F を満たす m の要素全体の集合が存在する。

ここで，条件 F が m で**確定的**であるとは，m の各要素 c に対して，c が F を満たすか満たさないかのどちらかであり，中間の場合がないことをいう。集合 $\{x : \mathrm{F}(x)\}$ が存在しない場合でも，分出公理により任意の集合 m に対して集合 $\{x : x \in m \,\&\, \mathrm{F}(x)\}$ は存在する。

この公理によって，与えられた集合から，与えられた条件を満たす要素を“切り離し”，それらを集めて集合を形成することが許される。これは明らかに内包原理を制限したものである。内包原理を分出公理に置き換えれば，クラスパラドクスが回避される。例えば，クラス全体のクラス $\{x : x$ はクラス$\}$ の存在を示すのに分出公理を使うことはできない。任意の集合 m に対し，m に属するクラス全体のクラスの存在を示すことはできる。ただし，条件「x はクラスである」は m で確定的であると仮定する。しかし分出公理を使ってクラス全体の

クラスの存在を証明するには，すべてのクラスを要素としてもつ集合 m の存在を証明しなければいけないだろう。同じことが集合全体の集合の存在を証明するときにもいえる。こうして，内包原理の代わりに分出公理を用いるとカントルのパラドクスは生じなくなる。同様の議論が他のクラスパラドクスを考えるときにもあてはまる。

分出公理によって，与えられた集合から多くの新しい集合が得られる。しかし，新しい公理的集合論においてそれまでの集合についての研究成果を引き継ごうとすれば，ある集合から新しい集合を構成するための方法が他に必要となるだろう。ツェルメロはこのための公理として，和集合公理，ベキ集合公理，選択公理の 3 つの公理を導入した。

和集合公理とは次のものである。

> 任意の集合 m に対して，m の要素の要素全体からなる集合 (m の和集合) $\cup m$ が存在する。

任意の対象 x に対して，x が $\cup m$ に属することと，x が m のある要素 y に属することは同値である。

ベキ集合公理とは次のものである。

> 任意の集合 m に対して，m の部分集合全体からなる集合 (m のベキ集合) $\mathbb{P}m$ が存在する。

これらの公理は次のように内包原理の一つとみなすことができる。つまり，任意の集合 m に対して，和集合公理は条件「m のある要素 y において，x は y の要素となる」を満たすもの全体の集合の存在を主張するものであり，ベキ集合公理は条件「x は m の部分集合である」を満たすもの全体の集合の存在を主張するものである。

また，選択公理とは次のものである。

> 互いに共通要素をもたない空でない集合からなる任意の空でない集合 m に対し，$\cup m$ の部分集合 c で，m に属する任意の p に対し，c と p がちょうど 1 つの共通要素をもつものが存在する。

このような集合 c を m の**選択集合**という。これは m に属するすべての集合からそれぞれちょうど 1 つずつ要素を選んできた結果と考えられる。ツェルメロ

はこれを用いて，すべての集合が整列可能であることを示した。選択公理に対して，数学的対象の存在証明にはその対象が定義される必要があると考える数学者たちから異論があがった[3]。選択公理は，集合を定義することなしにその存在を仮定することを許している。このように選択公理は，言葉による組み立てから独立に集合の存在を許すという見解の現れとみなすことができる。

これまでの公理が集合から新しい集合をつくるもののみだとすると，何によって，起点となる集合の存在を保証するのか。ツェルメロの答えは次の 2 つの公理である。一つめは，彼が**初等的集合公理**とよんだもので 3 つの部分からなる。(i) 要素をもたない集合 (空集合) が存在する。(ii) 任意の対象 a に対して，a のみを要素としてもつ集合 $\{a\}$ (a の単元集合) が存在する。(iii) 任意の 2 つの対象 a, b に対して，a と b のみを要素としてもつ集合 $\{a, b\}$ が存在する。(ii) と (iii) の部分は**対集合公理**として知られる次の一つの公理とみることができる。

> 任意の対象 a, b (異なる対象でなくてもよい) に対して，a, b のみを要素としてもつ集合 $\{a, b\}$ が存在する。

すなわち，(ii) は $a = b$ の場合，(iii) は $a \neq b$ の場合である。いま，ある対象が存在するとしよう (これを a とする) [4]。このとき，対集合公理によって一つの集合が存在する。すなわち $\{a\}$ である。さらに分出公理を用いて，$\{a\}$ の要素のうち自分自身と等しくないものすべての集合の存在がいえる。あらゆる対象は自分自身と等しいので，この集合は空でなければならない。よって，空集合の存在を公理として仮定する必要はない。それは，対象が存在するというつまらない仮定から対集合公理と分出公理によって導くことができる。空集合 $\emptyset$ の一意性は外延性公理による。

しかし，集合の枠組みで算術や解析学を展開するためには，さらなる集合の存在公理が必要である。ツェルメロは，ボルツァーノやデデキントが無限集合の存在を証明しようとしていたことを知っていたのだろう[5]。これらの試みは誤っており，ツェルメロは無限集合の存在が彼の他の公理から (それらが矛盾しない限り) 導くことはできないと確信をもって考えていた。それゆえ，彼は無限集合の存在を公理にしなければならなかったのである。自然数全体が集合となることを数学者はほぼ例外になしに認めているので，この公理は論争の対象とはならなかった。

そのツェルメロの無限公理とは以下のようなものである。

> 次の 2 条件を満たす集合 z が存在する。(i) 空集合は z の要素である。
> (ii) 任意の対象 x に対して，x が z の要素ならば $\{x\}$ も z の要素である。

簡単のため，この 2 条件 (i), (ii) をともに満たす集合を **Z 集合**とよぶことにしよう。このとき，Z 集合の要素による無限列 $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$ がある。ツェルメロはこれを自然数列を再現するのに用いた。また，すべての Z 集合の部分集合となるただ一つの Z 集合が存在することを示した。その集合はいまあげた列と同じものである。

順序数と基数

順序数とは，整列集合の順序型のことである[6]。順序型のような性質を数学的に考えるとき，これらの性質を数学的対象で表すことはしばしば役にたつ。その方法の一つは，適切な領域の中の性質 P をもつもの全体の集合によって，性質 P を表現することである。この方法は通常，その適切な領域なるものが，考えている性質によって分割される場合にうまくいく。すなわち，その領域に属するすべてのものがそれぞれ，考慮中の性質のうちのただ一つをもつ場合にうまくいく。順序型について考える場合，この条件を満たしている。すべての整列集合にはただ一つの順序型があるからである。しかし，与えられた順序型 α を集合論の枠組みで表現するのに，その順序型をもつ整列集合すべての集合を使うことはできない。そのような集合は存在しないからである[7]。カントル流にいえば，ある与えられた順序型をもつ整列集合全体は，AIM を形成する。

性質を表現する別の方法は，何らかの一定の仕様に基づいて各性質の代表例を選ぶというものである。フォン・ノイマンは整列集合の順序型に対して，わかりやすくて扱いやすい方法を示した[8]。その整列集合の順序型の代表を慣例に従って**順序数**とよぼう。順序数は単にそれより小さい順序数全体の集合と定めるというのがフォン・ノイマンの提案である[9]。一番初めの順序数は空集合でなければならない (空集合と同じ順序型をもつ整列集合は他にないからである)。これは，明らかに，自分より小さい順序数全体の集合である。そして，順序数の列は

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

とはじまる。フォン・ノイマンのアイデアの利点の一つは，要素関係 $\in$ が順序数の大小関係の役割を果たすという点である。順序数 α に対して α の後続者 (すぐ次の順序数) を $\alpha \cup \{\alpha\}$ として，すなわち α の要素と α 自身を要素とする集合で与えることができる。このような簡単な集合論的操作で後者順序数を定義できることも一つの利点である。

順序数 α は，α 以下のすべての順序数が $\emptyset$ かまたはある順序数の後者となるような順序数であるとき，**有限**であるという。有限順序数は自然数を表現するのに用いられる。よって，自然数 k を表現する順序数を $\underline{k}$ とすれば，$\underline{n+1} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots, \underline{n}\}$ となる。これは次の無限公理の別形を用いて超限数に容易に拡張される。

> 次の 2 条件を満たす集合 z が存在する。(i) $\emptyset \in z$. (ii) 任意の集合 x に対して，$x \in z$ ならば $x \cup \{x\} \in z$ となる。

すべての有限順序数はこの 2 条件を満たすどんな集合 z にも属することはすぐにわかる。ゆえに，分出公理より，有限順序数全体の集合，すなわち ω が存在する。これは最初の無限順序数であり，また最初の極限数でもある。ヒルベルトがおおいに賞賛したカントルによる超限順序数の算術 [10] と同じことがフォン・ノイマンの順序数を使っても容易に再現できる。

基数は集合論の中でどのように表現すべきだろうか。基数は集合についての性質であり，集合全体の領域は基数によって分類される。ゆえに，基数 κ を，κ 個の要素をもつ集合すべての集合で表現しようとするかもしれない。しかし，これでは ($\kappa = 0$ の場合を除き) そのような集合は存在しないという問題に再び陥る。代わりに，濃度がちょうど κ である特定の集合を代表として一定の方法で選び出す。フォン・ノイマンの順序数を使えばこれは容易である。基数 κ は，自分より小さな順序数がちょうど κ 個あるような最初の順序数によって表現されるものとすればよい。無限順序数は，他の多くの無限順序数と同じ基数をもつ。よって，有限基数は順序数と一致するにもかかわらず，無限においては基数と順序数は一致しない。

有限基数全体の集合は最初の無限基数 $\aleph_0$ である。無限基数は 1 を加えても大きくならないと一般に信じられており，これは成り立っている。しかし，別

の操作によって，より大きな無限基数に達することができる。無限基数 κ の次の無限基数は，自分より小さな順序数が κ 個以下であるような順序数全体の集合である。ここで，任意の集合 x に対して，x のある部分集合と 1 対 1 に対応できる順序数を集めた集合 aleph(x) の存在を認めよう。(本当はこれを証明する必要がある。)　この aleph を用いれば，

$$\aleph_0=\omega, \quad \aleph_{\beta+1} = \mathrm{aleph}(\aleph_\beta),$$

$$\aleph_\lambda = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta < \lambda\} \quad (\lambda \text{は極限順序数})$$ [11]

によって，無限基数のいくらでも大きな列を定義できる。x が集合であるとき aleph(x) も集合となることを仮定すれば，これは超限再帰法による妥当な定義である。また，任意の無限基数はある順序数 α によって $\aleph_\alpha$ と表せ，$\aleph_\alpha$ は $\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ に属さない最小の無限基数であることも証明できる。

置 換 公 理

カントルとその後継者らによって非形式的に展開された超限数の理論は，これまでにあげた公理だけからは導出されない。特に，すべての整列集合がそれぞれただ一つの順序数と同型であることや，x が集合のとき aleph(x) も集合であることを証明するには新たな公理が必要である。このとき我々が用いる公理が置換公理である。

カントルによる次の原理が置換公理の原型である。「2 つの多数物に 1 対 1 の対応があれば，両方とも集合であるか両方とも AIM である[12]。」これは「集合と AIM の間に 1 対 1 の対応が存在しない」といい換えてもよい。この原理は，集合は基数をもち AIM はもたないというカントルの考えから，簡単な議論で導かれる。つまり，もしも多数物 (クラス) B と集合 A に 1 対 1 の対応があるとすれば，B は A と同じ基数をもつ。よって B もまた集合でなければならない。この議論はカントルの置換原理

集合 A とクラス B に 1 対 1 の対応があれば B も集合である[13]

を含意する。一方，公理として用いるには，置換原理よりも便利な原理がある。これには 1 対 1 関係の代わりに「関数関係」という概念を使う。定義域のどの

要素 x にもただ一つの対象 y を割り当てる二項関係 $\mathrm{F}(x,y)$ を**関数関係**という。次の主張を**置換公理**という。

> 任意の集合 m と m を定義域にもつ任意の関数関係 F に対して，m の各元から F で割り当てられた対象全体のなす集合 $\mathrm{F}[m]$ が存在する。

ここで，$\mathrm{F}[m]$ は $\{y : \exists x[x \in m \,\&\, \mathrm{F}(x) = y]\}$ の略である。$\mathrm{F}[m]$ は「F による m の像」といわれる。m が F の定義域のとき，$\mathrm{F}[m]$ は F の値域である。置換公理と先に述べたカントルの原理が同値であることは容易に示すことができる[14]。

「明確性」の問題

ツェルメロによる集合論の公理化に対する不満のみなもとは，下記のようなツェルメロの分出公理の記述に含まれる「ある集合で**明確**な条件」という概念である。

> 任意の集合 m と m で明確な任意の条件 $\mathrm{F}(x)$ に対して，条件 $\mathrm{F}(x)$ を満たす m の要素 x を集めた集合が存在する

をツェルメロの分出公理という。ツェルメロは明確性を説明しているが，それは紛らわしい。条件 F が集合 m で明確であるとは，m の任意の要素 x に対して，x が F を満たすことが公理から証明できるか，あるいは F を満たさないことが証明できることと読めてしまう。公理から証明できることは分出公理の中の明確性が何であるかによるので，この説明は循環論法である。F が m で明確であることを，m の任意の要素 x に対して x が F を満たすか満たさないかどちらかであることと定める方法もある。これならば明瞭である。しかし，この意味の明確性に対してはエフェクティブ[*)]な判定法はない。つまり，この公理の真の事例が何かをエフェクティブに知る方法はないのである。ワイル，スコーレム，フレンケル，フォン・ノイマンがこの問題に取り組んでいる。

これに関連して，分出公理の中の条件 (つまり，命題関数) についての言及は，基礎づけ的目標と両立しえない。つまり意味のような主観的側面をまったく含まないものに関する理論として数学を再構成するという，基礎づけの目的とそぐわないという問題がある。もし意味やその他の思想上の構成物が理論の存在

---

*) 訳注：この語の正確な意味は 4 章の「戦略，第一部 (形式化)」の項を参照。

論に組み込まれるとすれば，その構成の規則も必要となり，この試みは『プリンキピア・マテマティカ』と同じ過ちを犯してしまうことになるだろう。同じ問題が，置換公理における関数関係についての言及にも生じる。関数関係は2項間のある種の条件なので，この公理のために集合論が扱う対象が集合だけでなく，条件も含むことを要求されるのである。

フォン・ノイマンの提案

これらの問題に対し，2つの異なる対策が1920年代に提唱された。一つはフォン・ノイマン，もう1つはスコーレムによる。フォン・ノイマンは，集合だけではなくカントルの絶対的無限多数も集合論の対象領域に入れた。この絶対的無限多数は今日，真のクラスといわれる[15]。真のクラスは決して要素になることはできない，と定めることでパラドクスは回避される。ただし，ツェルメロの場合と同様に他の理由から矛盾が生じないという保証はない。フォン・ノイマンは無矛盾性の証明に希望を託した。

真のクラスを認めることで分出公理や置換公理の問題をどのように処理できるのだろうか。いま，分出公理は次のように述べられる。

> 任意の集合 m と任意のクラス B に対して，$\{x : x \in m \,\&\, x \in B\}$ は集合である。

ここで $\{x : x \in m \,\&\, x \in B\}$ は m と B の両方に属する対象全体のクラス，m と B との共通部分を表す。条件に関する部分はなくなっている。順序対のクラスを考えれば，クラスとして**関数**を定義することができる。それは第一成分が同じで第二成分が異なる2つの順序対をもたないクラスである。この定義のねらいについて考えてみよう。もし F がここで定義した意味の関数であれば，

> 順序対 $\langle x, y\rangle$ は F の要素である

という形の主張を「F(x) = y」や「F の x に対する値は y」というなじみの言葉で述べることができる。(これは19世紀の用法である。筆者は「入力 x に対する F の出力は y」，より単純に「F は x に y を割り当てる」といういい回しを好む。) 関数に属する順序対の第1成分全体のクラスはその関数の定義域で，第2成分全体のクラスは値域である。置換公理は，関数関係を関数で置き換え

ると次のようになる。

> 任意の集合 m と任意の関数 F に対して，$\{y : \exists x[x \in m \,\&\, \mathrm{F}(x) = y)]\}$ は集合である。

クラス $\{y : \exists x[x \in m \,\&\, \mathrm{F}(x) = y)]\}$ は F による m の像 $\mathrm{F}[m]$ である [16]。もちろん，これらの公理の効用は，その理論においてどんなクラスが定義できるかによる。真のクラスを扱う集合論には，クラス内包公理でクラスを定義するものもある。ここで真のクラスではない個体や集合に対して“対象”という語を使うことにしよう。すると，**クラス内包公理**は以下のように述べられる。

> 真のクラスを扱わない集合論の言語で表現できる任意の条件 $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(x)$ を満たす対象全体のクラス $\{x : \varphi(x)\}$ が存在する。

しかし，このような公理は必要ない。代わりに，与えられたクラスから新たなクラスをつくる有限個の公理があればよい。例えば，その一つは**補クラス公理**，すなわち

> 任意のクラス C に対して，C に属さない対象全体のクラス $\sim$ C が存在する

である。以上がフォン・ノイマンによる方法である [17]。このようにして，彼は命題関数や条件，またはその類似物 (何らかの形で思考の特質に依存する存在) について述べることを避けた。集合論の対象領域から除いたのである。これによって，条件の“明確性”の適切な特徴づけをみつけなければならないという問題はなくなった。

しかし，クラスを集合と真のクラスに分け，真のクラスも集合論の対象領域とすることを認めるフォン・ノイマンの提案では，集合と真のクラスの違いをどう説明するのかというカントルのアプローチの主要問題が理論の急所となる。この説明がないと，その違いはその場しのぎにすぎないことになり，数学の基礎としての理論の合理的な信用が弱くなるのである。カントルは満足な回答をもたなかったし [18]，フォン・ノイマンの場合は不確かなところはないが説明としての価値はない (そもそもその説明のために提唱されたものでもない)。

フォン・ノイマンによる集合と真のクラスの違いの要点は，集合全体のクラスと 1 対 1 の関係があるという意味で，真のクラスは要素となるには大きすぎる，ということである [19]。明らかに，これはクラスパラドクスの解決ではない。

大きさが問題となるのはなぜか。集合全体のクラスと同じ大きさという理由で，なぜ他のクラスの要素とはならないのか。一定の最小サイズの物体の詰まった，硬くて曲がらない容量の限られた閉じた容器のようにクラスを考えるのはなぜか。「集合全体のクラス」は意味がないとか，あいまいであるというよりも，集合全体のクラスはクラスの要素にならないとするほうがよい理由はまったく明らかではない。

スコーレムの提案

スコーレムは集合論の言語が正確で明瞭な方法で形式化できることを指摘した。すなわち，その言語の任意の表現が文であるかどうかを決定でき，さらに，条件を表すものとしての開放文を特定する決定可能な手段があると指摘した。例えば，

$$\neg\exists y(y \in x)$$

は「x は要素をもたない」ことを表す論理式であり，

$$\forall z[z \in y \rightarrow z \in x]$$

は「y の任意の要素は x の要素である」を表す二項条件 (関係) である。条件 (あるいは関係) の代わりに，代入した結果が開放文となる図式的表現を使うこともできる。ツェルメロの分出公理は

> 任意の集合 m と m で明確な任意の条件 F に対して，F を満たす m の要素全体の集合が存在する

である。対応する公理図式は

> 任意の集合 m に対して，$\psi(x)$ を満たす m の要素 x からなる集合が存在する

である。ここで $\psi(x)$ はただ一つの自由変数をもつ，集合論の形式言語で一項条件を表す開放文の図式と理解する。上の図式のどんな代入結果も一つの公理となる。したがってこの図式は無限に多くの公理を表す。しかしこれは問題ない。集合論の言語の与えられた任意の文が公理であるかどうかを公理図式からエフェクティブに判別できるからである[20]。

以上がスコーレムの提案であり，分出公理と置換公理にあてはめることが容易にできる[21]。こうしてスコーレムはツェルメロによる集合論の初期の公理化における弱点を克服した。

結　論

ツェルメロの公理に置換公理を加えたものは1920年代初頭までに知られた集合論の利点をすべて保有している。それは，カントルの超限理論ばかりでなく，集合論が基礎づけの研究にもたらした成果も含む。つまり，集合論の枠内での(自然数の)算術の再現，実数の集合論的記述とそこで構築される集合論の枠内での解析の展開などである。この理論は，明らかにロジックの体系ではないが，単純型理論よりも強力で柔軟で直観にあっている。

しかし，置換公理が書物に現れる1920年代初め頃はまだ，集合論の公理がまとまって何かをはっきり表現しているという明確な認識はなかった。集合論の公理化はむしろ，できる限り素朴集合論の内容を保ちつつパラドクスを生じさせないようにする試みの結果であった。このように，当時，公理的理論が無矛盾であるという確固たる信用がなかった。そのため無矛盾性証明の必要に迫られていた。それはそうとして，数学の基礎づけとしての公理的集合論への別の批判が現れた。それが次章の話題である。

2 楽園への猛攻

19世紀末にパラドクスが発見されていたにもかかわらず，カントルの集合論は発展を続け，無限小解析を明晰にすることに役だった。また，空間における点集合の研究とその位相空間への一般化にも役だった[1]。「カントルの楽園」というヒルベルトのうまいよび名がある[2]。超限数の理論を含む集合論は，その名のとおり麗しい世界を解き明かすだけの直観的な内容をもっていることは疑いない。さらにツェルメロによる集合論の公理化によって，件（くだん）のパラドクスがおこる直接的な心配は一掃された。ツェルメロの公理系では，そのような矛盾を導く過程は認められないからである。しかし集合論が，無矛盾であると信じるに足る積極的理由が欠けている限り，その信用はゆらいだままであろう。その中で新たな批判が現れた。

スコーレムによる批評

1920年代初め，スコーレムはツェルメロの公理化を改良し，その主要な欠陥を取り除いた。しかし同時に彼は，数学の基礎としての集合論の役割が公理化することで保たれるという考えをたたきつぶした。そもそも，集合論の公理化が役にたつと考えられたのはなぜか。英語アルファベットの文字の集合のように，名前のついた要素からなる集合を例として，我々は集合や要素関係についておおよそ理解する。しかし種々のパラドクスから，このような初期の理解は，集合であることや要素関係についての一般的性質の理解に拡張できないことがわかる。そこで直接的な理解の代わりに集合論を公理化することで，集合や要素関係の間接的な(インプリシットな)定義が与えられると期待したのだろう。その見方はツェルメロによって促進されたわけではないが，1920年代初めには一般的であった。例えば，フォン・ノイマンは次のように述べている。

> 「(素朴な集合の概念の) 代わりに公理的手法が採用される。我々は多くの前提条件を形式化し，そこでは「集合」という語は確かに現れるがそれ自身は意味をもたない。(公理的手法の精神に従えば,)「集合」によって理解されるものは，その前提条件から導かれる以上のことを知ることができないし，知りたいと思わないような対象である。」[3]

個体 (集合やクラスでない対象) の集合が与えられれば，公理によって集合のユニバースが決定し，基数などの主要な集合論的性質や関係も決定されるだろうと期待されていた。そして，そうなるものと思われていた。

しかし，スコーレムは，二，三の数学的事実をあげ，公理化ではこのようなことができないことがわかると主張した。彼が攻撃を集中させたのは，ツェルメロの公理を自らアレンジした公理系で，分出公理図式 (の公理) を含む。しかし，置換公理図式 (の公理) を加えたそれ以前の提案を採用する場合にもその議論はあてはまる。この公理系は ZFC とよばれている [4]。まずスコーレムは，公理系が無矛盾であれば，その対象領域はただ一つに定まらないことを指摘した。「$x \in y$」を要素関係に「$\mathrm{S}(x)$」を集合である性質として，公理をその意図どおりに解釈し，個体全体の集合を固定してさえそうなるのである。しかも，要素関係の構造がまったく違う領域も存在しうる。というのも，この公理系では要素関係に対する無限降下列

$$\cdots \in x_{n+1} \in x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_2 \in x_1 \in x_0$$

の存在を排除しないからである。もし ZFC を満たす領域でこのような列があれば，このような列をもたない部分領域で ZFC を満たすものが存在する [5]。しかし，これには無限降下列の存在を許さない公理を付け加えればよいので，公理化による基礎づけの達成にとって深刻な脅威にはならない [6]。しかし，スコーレムはもう 1 つ回避しがたい問題を用意していた。

レーベンハイム–スコーレムの下降定理

スコーレムはある定理に注目した。無限に対する我々の理解の中核をなす性質は，集合論の厳密な形式体系では突き止められないことを示すような定理である。この定理を簡潔に述べるために，略語を用意しよう。正確に定められた

形式言語は，その言語における表現全体の集合が自然数全体 (あるいはその始切片) と対応させて数え上げられるとき，**可算**という。また，すべての変数は領域の要素のみが割り当てられる (つまり領域の部分クラスを割り当てられる変数がない) とき，**1 階**の言語という。いま，L を 1 階の言語で，論理記号以外の基本記号は，関係記号，関数記号，述語記号，個体記号 *) に分類されているとする。L はすべての種類の記号をもつ必要はない。例えば，L が個体**) 付きの集合論の言語とすると，L は要素関係を表す二項関係記号と，集合であることを表す述語記号だけをもてばよい。領域 D と，L の非論理記号 σ それぞれに対し，σ の種類にふさわしい値を割り当てる解釈関数からなるものを L の**解釈**という。

記号の分類	値のタイプ
n 項関係記号	D の要素の n 項組のクラス
述語記号	D の部分クラス
n 項関数記号	D 上の n 項関数の外延 (グラフ) [7]
個体記号	D の要素

例えば，D を集合論のある解釈の領域とする。このとき解釈関数は，二項関係記号「$x \in y$」に D の要素の順序対のクラスを割り当て，述語記号「S(x)」に D の部分クラスを割り当てる。すべての公理が真になる解釈を，その公理系の**モデル**という。

> 1 階可算言語において，無限領域のモデルをもつ公理系は可算領域のモデルをもつ

という定理を，可算言語の**レーベンハイム–スコーレムの下降定理**という。以下これを LS と略す。この定理は最初レーベンハイムによって発見され，スコーレムがレーベンハイムの主張を改良して現在 レーベンハイム–スコーレムの定理として知られるものに一般化した [8]。

なぜ LS がそんなに重要であるかをみるには，より具体的に，LS の集合論への適用を考えるとよい。便宜上いくらかの用語をさらに与えよう。要素関係を表す二項関係記号「∈」と，個体付きの場合には集合であることを表す述語記

*) 訳注：「名辞」「定数記号」ともよぶ。
**) 訳注："集合" でないもの。前章参照。

号「S(x)」だけを非論理記号にもつ形式言語を**集合論の言語**という (実際は，それらの記号を用いて定義される表現の略記としての新たな記号も使う。しかし，これらは消去可能である)。次の 3 条件を満たす集合論の言語の解釈を**意図された解釈**という。(i) 領域は，集合または個体のみからなる。(ii) 述語記号 S(x) に領域内の集合全体のクラスを割り当てる。(iii) 関係記号 $\in$ に，領域の要素の順序対 $\langle x, y \rangle$ で，第 1 成分 x が第 2 成分 y の要素であるもの全体のクラスを割り当てる。公理系に属するすべての公理が真となる集合論の言語の意図された解釈を，その公理系の**意図されたモデル**という。LS を集合論に適用したのが次の定理である。

> 集合論の 1 階可算言語において，無限領域の意図されたモデルをもつ公理系には可算領域の意図されたモデルも存在する。

スコーレムのパラドクス

集合や要素関係の概念についての条件を定めた ZFC は数学の基礎づけを与えられるという見方に対して，LS が問題になるおそれがあるのはなぜか。主要な問題点はこうである。もし ZFC に無限領域をもつ意図されたモデルが存在しないならば，その他の数学領域をそこで再現できるような集合のユニバースを ZFC は特徴づけていない。よって，無限領域をもつ意図されたモデルが存在するとしよう。上の定理から，ZFC は意図された可算モデル M をもつ。ここで**スコーレムのパラドクス**とよばれる混乱がおこる。ただしスコーレムが述べているように，これは自己矛盾でない。可算よりもずっと大きな集合の存在が ZFC の公理から証明できる。例えば，有限順序数全体の集合 ω のベキ集合 $\mathbb{P}\omega$ がそうである。それゆえ，M において非可算無限集合が存在しなければならない。スコーレムは問う。「どうやって (M の) 領域全体を " 有限の正の整数 " を使うだけで数えあげられるのか？」[9]　スコーレムはその答えをもっていた。それに基づいて，集合や要素関係の理解を集合論の公理のみに頼るとすれば，集合論の中核をなす概念は避けられない相対性をもつことになると論じた。これをみていこう。

M が推移的であると仮定すれば問題をはっきりさせることができる。M が

推移的とは，M の領域に属する任意の集合が M の領域の部分集合でもあるということである[10]。これを用いて議論は以下のように進む。ZFC の定理の一つに，形式化しないで述べると，非可算集合が存在するというものがある。これの意味するところは，どんな集合 d によっても数え上げられない集合 c が存在するということである[11]。定理の中のくだけたいい回しを表す形式的表現を角括弧を使って表すことにする。公理の集まりの論理的帰結は，その集まりの任意のモデルで真になるから，[非可算集合が存在する] は M において真である。いま，M の領域に属する集合 c を任意にとる。M は推移的だから，c は M の領域の部分クラスである。一方，可算集合の部分クラスは可算である。M は可算であるので，M に属する任意の集合 c は可算である。ところが，これは［非可算集合が存在する］が M において真であることと矛盾するように思える。

この謎を解くには

[非可算集合が存在する] が M において真である

ということの意味を少し分析しなければならない。「φ が M において真である」は「φ は解釈 M のもとで真である」ことのいい換えである。形式的文は解釈がない限り，いかなる命題をも表さない。ゆえに真にも偽にもならない。一方，解釈 M のもとでの形式的文 (φ^{M} と書く) は命題を表出する。よって真か偽となる。そこで,「[非可算集合が存在する]$^{\mathrm{M}}$ が真である」とは何か，あるいは単に，

[非可算集合が存在する]$^{\mathrm{M}}$

が何を意味するかを明らかにしなければならない。すると，この命題が，M の要素である任意の集合が可算であることと本当に矛盾するかどうかわかる。上の文を，まず

[集合 x で，x を数え上げる y がないものがある]$^{\mathrm{M}}$

と展開する。M の領域を dom(M) で表して，量化記号を外に出せば

dom(M) の要素 x が存在して，dom(M) の任意の要素 y は x を [数え上げ]$^{\mathrm{M}}$ ない

となる。さらにこのような分解を続けなくても，次のどちらか 2 つの可能性を順に考えれば容易に問題は解決する。いま，dom(M) の任意の要素 y で [数え上げ]$^{\mathrm{M}}$ られない dom(M) の要素 c をとる。一つの可能性は,「dom(M) の任意の

要素 y が c を [数え上げ]$^{\mathrm{M}}$ ない」が「dom(M) の任意の要素 y が c を数え上げない」を含意しない場合である。この場合，パラドクスは直ちに解消する。c の [数え上げ]$^{\mathrm{M}}$ がないことと c の数え上げの存在は矛盾しないからである。もう 1 つの可能性は,「dom(M) の任意の要素 y が c を [数え上げ]$^{\mathrm{M}}$ ない」が「dom(M) の任意の要素 y が c を数え上げない」を含意する場合である。この場合，M の領域に属する c の数え上げがないので，可算領域の部分クラスである c は可算だということに反するようにみえる。しかし矛盾はない。c を数え上げる集合が M の領域にないことは，c を数え上げる集合が M の領域**外**にあることと矛盾しないからである。c が [非可算]$^{\mathrm{M}}$ で，M の領域に属する集合ならば，c を数え上げる集合は存在するが，それは M の領域に属さない。これが問題の答えである。

相 対 性

LS の本当の重要性はパラドクスを生じることではない。パラドクスは解消されるが，その解き方に述べられた状況を吟味すると，LS の重要性が明らかになる。c と M を上と同じものとする。すなわち，M の領域に c の数え上げはないが，M の領域外に c の数え上げがあるとする。この場合，ZFC の意図されたモデルで，c がそこで可算となるような大きなものが存在する。これを M^{+} としよう。すなわち，c は M^{+} の領域に属し，[x は可算]$^{\mathrm{M}^{+}}$ が成り立つ。c は M にも属するが [x は可算]$^{\mathrm{M}}$ は成り立たない。したがって「可算性」はモデルに依存する。つまり，c は M^{+} においてのみ可算であるから，M^{+} の可算と M の可算は同じ外延をもたない。

これは「非可算」の場合ももちろんのこと，濃度に関する他の概念にもあてはまる。「有限」,「無限」,「x と y は同じ濃度をもつ」，そして「x は y のベキ集合である」もそうである。この相対性は集合論において定義される項にも及ぶ場合がある。これは，次に述べる LS の強いバージョンを用いて説明できる。

> 1 階理論 T の任意のモデル C に対して，T のモデルとなる C の可算部分モデル B がある。

ここで，集合論のモデル B と C に対して，次の 3 条件を満たすとき B は C の部

分モデルであるという。(i) B の領域は C の領域の部分クラスである。(ii) [x は集合]$^{\mathrm{B}}$ を満たす B の領域の任意の要素は [x は集合]$^{\mathrm{C}}$ を満たす。(iii) B の領域の要素の順序対 $\langle b_1, b_2\rangle$ で，$[x \in y]^{\mathrm{B}}$ を満たすものはすべて $[x \in y]^{\mathrm{C}}$ を満たす。いま，B と C を ZFC の意図されたモデルとし，B は C の部分モデルとする。C の領域に属する $[x = \mathbb{P}\omega]^{\mathrm{C}}$ を成り立たせる対象と B の領域に属する $[x = \mathbb{P}\omega]^{\mathrm{B}}$ を成り立たせる対象が同じとは限らないという意味で，項 $\mathbb{P}\omega$ は相対的である。モデルと部分モデルとで，集合論のこの項が指し示すものが変ってもよい。

このように，ZFC では (個体の集合が与えられても) 集合のユニバースを決めることはではできない。それればかりか，集合論の中核をなす特性や関係も決められない。ゆえに，公理は集合であることや要素関係に対する条件を定めたものとみなすことはできない。もしできるとすれば，可算性のような，集合と要素関係の概念からつくられる概念も確定できるだろう。これは公理化の細部によらず 1 階可算形式言語の他のすべての公理化にもあてはまるので，集合論の 1 階のどんな公理系でも，それ自身では集合論のいくつかの中心概念の指示対象を特定できない。

ここで，考えられる 3 つの反応について吟味し，それらがなぜ不十分かを簡単に説明しよう。まず初めに，可算領域をもつ ZFC のモデルが存在するというとき，可算性の非形式的な“絶対的”特性をあらかじめ仮定しているという反論があるだろう。可算性は絶対的特性をもたないという結論によって，先の議論は否定されるというのである。この反論は，結論についての誤解に基づいている。(後にスコーレムも明確に述べているが) 可算性が絶対的特性をもたないことは結論づけられていない。集合性や要素関係が可算言語の 1 階公理系だけで決定されるなら，可算性に絶対的特性がないというのが結論である。攻撃にさらされているのは，集合や要素関係の概念，そして，それらを用いて定義される概念の指示対象 (または外延) が，公理によって間接的に (インプリシットに) 決定されるという考えである。

次に，言語を“可算”に制約することが不合理だという反論があるだろう。非可算個の表現をもつ無限言語を我々は扱いうる。これによって除くことができるモデルもあるが，それでも，公理的集合論は集合であることや要素関係を間接的に定義することができるという考えが救われるわけではない。我々が分別できる原始記号と我々が理解できる規則では，可算個の表現しか現れない。も

し非可算個の表現をもつ言語があるとしても，我々にわかるのは可算部分だけであろう。したがって，集合に関する理解と，集合の特性や関係についての我々の概念は，可算言語で組み立てられる枠を超えないであろう。

最後に，言語を“1階”に制約することが不合理だという反論があるだろう。領域の部分集合の上を動く変数をもつ2階言語のほうが，集合のユニバースに関する我々の考えをとらえやすいと考えられよう。しかし，純粋な公理化による数学の基礎づけに対するスコーレムの考察をくつがえそうとしたときと同じように，これには2つの弱点がある。第一に，そのような言語を理解するには2階の量化を理解しなければならない。これは，2階のZFCを理解するには無限領域の「すべての部分集合」をすでに把握していなければならないということである。これは，公理だけでは理解できないだろう。第二に，2階言語の公理系についてLSの類似がある[12]。つまり，2階言語に代えることによって取り除かれる相対性もあるが，多くは残るのである。以上の反論に対していうことは他にもある。しかし，スコーレムの考察が公理化による定義という考えに疑念を抱かせるのに十分であることは，明らかになったはずである。集合に関する我々の直観が数学を基礎づけるには弱すぎる，あるいは信頼できないとしても，集合論の公理化はその不十分な点を埋め合わせはしないだろう[13]。

ブラウワーの直観主義者としての挑戦

これまでに打ち立てたすべての数学，特に連続体に関する解析学は，集合論の言語で書き直すことができ，集合論の原理から導くことができた。ゆえに集合論は関心の的だった。集合論における解析学の再構築の基礎はデデキントやカントルらによってすでになされていた。実数に関するデデキントの独創的な研究[14]以降数十年間，この方面の研究は点集合論の発展の中で進んでいき，この研究の価値は広く認められた。ゆえに，ツェルメロが目論んだように，ただ一つの基礎である集合論を整え，パラドクスに対して揺るぎないものにしなければならないと思われた。しかし，初期の研究に対して反論もあった。それはただ細部にかかわるというだけではない。

第一の批判者はブラウワーだった。ブラウワー自身，点集合論，特に位相空間論と次元理論に対して大きな貢献をし，研究の深さと厳密さ，独創性によっ

て1913年までに世界的な賞賛を受けていた。しかし彼の哲学的見解が，それらの発見をもたらした枠組みから彼自身を遠ざけることになった。ブラウワー自らがそうよんだ「直観主義」は，自然界についての現象学の数学版のようなものである。この見解に立てば，数学の実体や事実は知性の産物であり，その意味で頭の“中”にある。連続量の適切な扱いがこの論争の一つの焦点だった。絶え間ない事象の持続というような経験的認識から，我々は連続的区間を理解している。連続的区間は点からなるという考えは，このような理論以前のアイデアにはない。しかし，このような見解は，数学的な技術によって形を整えない限り，多くのパラドクスを生む。一方，だんだん短くなる間隔を無限に継続することによって“点に帰着”するという自然な考え方がある。コーシー列[15]の構成法のような例によって，この考えを数学的に詳述できる。したがって，でき合いの点の代わりに発展途上にあるそのような構成法をとれば，解析学はより確実に経験と合致するだろう。ブラウワーの直観主義はこのような見通しの一般化，発展と考えられる。すなわち数学的実体や事実は，構成者の知性に直結する(この直結を直観という)知的構造物ということである。この見解によれば，つねにその時点の直観を超える数学的対象や事実が存在することはない。

この学説では，有理数の無限集合や無限列を用いた実数の古典的な定義法は禁じられる。古典的方法では，無限集合や有理数列はなんの構成も行わずに初めからそのままの形で存在する。ブラウワーの方法では，無限，つまり“果てなく続く”列を**選択**列という。選択列とは，自由に，あるいは明示された制約のもとで選ばれた要素の列である。そのような列について，任意の時点で存在するものは，(i) すでに選択された要素の有限列と (ii) 選択制約規則である。与えられた規則によりすべてのステップでいくつかの選択列が決まる。そのような列は**法則的**数列という。列に関する事実は，すでに構成された部分や，構成を決定し制約する規則に関する事実，それから構成的に導かれるものに関すること以外にない。これは論理にとって重大な影響がある。というのも，列の構成を決定し制約する規則から構成的に証明されない限り，数列の目下の構成部分をこえたところについての真偽はその時点で答えがないということだからである。使い古された例だが，π の10進数小数展開のどこかで9が連続して9回現れるかどうかは目下のところ真でも偽でもない。古典法則の**排中律**によれば「P，または，Pではない」という形の命題はすべて真である。しかし，排中律

はこの見解では認められない。数学にとってこの影響の重大性は評価してもしすぎることはない。例えば，階段関数のような簡単なものさえ認められなくなる。古典的解析では，区間 $[0,2]$ 上の次のような関数が定義できる。

$$\text{任意の } x \in [0,2] \text{ に対して，} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \text{ のとき} \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

しかし，直観主義者の立場からはこれは認められない。0 と 2 の間のすべての実数 x に対して，$x = 1$ または $x \neq 1$ であると仮定しているからである[16]。

古典法則の**二重否定**によれば「P でないのでないのなら，P である」という形の命題はすべて真である。直観主義では二重否定もまた認められない。二重否定を受け入れるということは，いかなる命題も，その二重否定が成り立つときそれ自身が成り立つことを認めるということである。ブラウワーの見解はそうではない。というのも，彼の見解では，数学的真実は構成的に成立する事実以外の何物でもなく，数学的虚偽は構成が不可能であると構成的に示される事態なのである。すでに構成された部分には 9 が連続して 9 回現れない非制約選択列を s としよう。s は非制約選択列なので，与えられた情報から s のどこかで 9 が連続して 9 回現れることを除外できないことがわかる。このように，s には 9 が連続して 9 回現れないことを構成的に確立することができないことが構成的に示される。したがって，構成的には s で 9 が連続して 9 回現れ**ない**ことは**ない**。もし二重否定が成り立つとするならば，s には 9 が連続して 9 回**現れる**と結論できるはずである。しかし，それは構成的に成り立っていないので間違いである。すでに構成された s の部分には 9 は連続して 9 回現れず，この先 s で 9 が連続して 9 回現れることを導く制約規則はないからである。

ブラウワーの反論は，集合論の原理の 1 つや 2 つにとどまらない。数学全体を通して用いられる基本の論法が無効であると一蹴された。無限が現れるところはどこでもその被害は大きく，とりわけ解析学と集合論はそうであった。直観主義はただの公理的集合論への批判ではなく，19 世紀の数学の中核，古代から綿々と続く数学の大部分の全面否定だった。他の人々が明瞭性と体系と厳密性を古典的数学にもたらそうと努力していたのに対し，ブラウワーにとっての重大任務は，直観主義者の視点から数学を新しく構成し直すことであった[17]。

ワイルの可述的立場

古典論理学は受け入れるが，数学の非可述的な定義を認めないというやや穏やかな見解もある。そこでは，次の循環論法原理に注意が払われている。

自らが属するクラスを用いることによってのみ定義可能な実体はない。

これは，ワイルが『連続体』[18] を書いたときの見解である。集合論で解析学を展開する古典的方法はすべて，かなり基本的な段階でこの原理に反する。つまり，実数の集合の上限を定義するときである。『プリンキピア・マテマティカ』第 3 部 2 章にこの問題が説明されている。ワイルがこの問題をどのように扱おうとしたかを知るには，まず，実数をデデキントの左切断 (以下単に「切断」という) で再現し，問題をはっきりさせる必要がある [19] 。

デデキントによると，連続体についての構造上の著しい特色は，実数の任意の空でない集合は上に有界ならば上限をもつことである [20]。これは解析学の多くの定理の証明に使われる原理である。集合論の枠内でこの古典的解析学を展開しなおすには，上に有界な空でない集合の上限を集合論的に定義しなければならない。切断を使えばこれは簡単である。もし S が実数の空でない集合で，上に有界であれば，S の上限はまさに S の合併集合 $\bigcup$S である。すなわち，

$$\text{S の上限} = \{q : \text{ある } r \text{ に対して } q \in r \,\&\, r \in \mathrm{S}\}.$$

ただし，変数 q と r はそれぞれ有理数と実数上を動く。$\bigcup$S 自身が実数，つまり，切断であることと，それが S の (包含関係に関する) 上限であることは簡単に示せる。$\bigcup$S は実数であり，その定義の中の変数 r は実数上を動くから，$\bigcup$S は厳密にみると自分が属するものを用いて定義されている。非可述的定義を避けることで循環論法原理を尊重し続けようとすれば，この定義は受け入れられない。

ワイルはこれを回避するために，デデキントの公理 (実数の任意の空でない集合は上に有界ならば上限をもつ) を，上に有界な任意の実数**列**は上限をもつという原理に置き換えることを提案した。$\mathbf{r}$ を上に有界な実数列 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots$ とする。ワイルはこの列の上限を，その列に属する実数の合併で定義した。すなわち，

$$\mathbf{r}\text{ の上限} = \bigcup \mathbf{r}[\mathbb{N}]$$

である。これが循環論法原理に反しないことを確めるには，次のように合併記号を使わず書き下してみるとよいだろう。

$$\mathbf{r}\ \text{の上限} = \{q : \text{ある}\ n\ \text{に対し},\ q \in \mathbf{r}_n\}$$

ここで n は自然数，q は有理数上をうごく。このように定義しても $\mathbf{r}$ の上限は実数 (切断) であり，有理数でも自然数でもない。したがって，その定義で用いられている変数のどちらもその変域に実数をもたない。

このことから，実数の集合より実数列を用いて解析を展開することがワイルに残された課題だった。非可述的定義の禁止は，数学において階数の違いを守るべきであることを要求する。実体の階数は，その定義に含まれる構成要素に依存する[21]。しかし，異なる階数の実数をもつ解析学の再構成は非実用的になり直観的な単純さを失うようになる。そこで，一番低い階数の実数のみの解析学を構成することをワイルは提案した。ブラウワーの徹底した直観主義研究プログラムの展開に圧倒されたとき，ワイルはそれほど急進的立場にはいなかった。連続体に関する概念について，彼とブラウワーには確かな隔たりがあったのである。しかし，彼はそれを直観主義に沿うものに改め，公然とブラウワーに同調した[22]。これはつかの間のものであった。ワイルはまもなく，直観主義の立場をとることで，どれほどのものを失うかということに気がついた。彼は後にこう書いている。「ブラウワーに従えば，数学は最高の直観的明快さを得るだろう。彼の学説は最後までよく考えられた理想主義である。しかし，数学者は自らの高遠な理論の大部分が霧の中に消えていくのを見て悲嘆にくれることになる。」[23]　それと同じ頃に彼は，ヒルベルトによって始められていた別の研究プログラムの価値を理解するようになっていた。

ヒルベルトは，おそらく，彼のもっとも有能なもと博士学生であったワイルが有能な弟子のブラウワーに同調して集合論と古典的解析学を拒否するのをみて危機を感じたのか，彼ら両方を非難した。ヒルベルトはこう書いている。「もしそのような改革論者に従えば，我々はもっとも価値ある宝の大部分を失うおそれがある。」[24]　彼は古典数学を守る研究プログラムの発展に心血を注いだ。

ヒルベルトのプログラムを説明するには，まずその基礎となるヒルベルトの有限の立場の哲学について解説しておく必要がある。それが次章の主題である。

3 ヒルベルトの有限主義

現状では我々はいまパラドクスにぶつかっており，それにこのまま耐えられるものではないことを認めなければならない。1925年，ヒルベルトはそう言った。「数学的思考でさえうまくいかないのなら，我々はどこで確実性をみつけるのだろうか？」　この嘆きの後に楽観的な宣言が続く。「我々の科学に背かずにパラドクスから脱出できるまったく申し分のない方法がある。」[1]　実際，ヒルベルトも彼の共同研究者も，パラドクスが，数学，特に集合論と解析学のどこかに欠陥があることを示しているとは考えていなかった。ヒルベルトはツェルメロの公理に何も悪いところはないと強く主張しながら，「もし我々がそれを証明の出発点や基礎として扱うならば，数学は絶対的な確実性という特性を失う」と言った[2]。ヒルベルトが基礎的問題とよんだものを解決するためには，ツェルメロがもうなし終えたと信じられていた，矛盾を出さない集合論の公理をみつけることだけでは不十分だった。その他に，その公理が矛盾や新たな誤りを生み出さないことを証明する必要もあった。

有限主義と論理

もちろん，公理の集まりはそれ自身では何も生み出さない。ある論理，すなわち，ある導出規則 (と場合によっては論理規則) と結びついてはじめて公理は矛盾を導くのである。このことは重要である。なぜならば，公理の集合とその論理によって特徴づけられた理論の不確かさは，公理によるものというよりは論理によるものであるかもしれないのである。ヒルベルトの見解では，よく知られた論理は，あるいくつかの条件を満たしている文脈においてのみ有効であると仮定できる。これが有限主義の入り口である。これらの条件のうちの一つが，議論の領域が有限であるというものである。正整数の算術のように，領域

が無限のときは古典論理のある規則が正当でなくなる，それゆえ領域が有限であることがわかっている場合を除いてその規則の使用が不確かさを招いてしまうとヒルベルトは主張した。もっとも重要な例は，次の量化排中律 (QLEM)[3] である。

すべての x に対し $\varphi(x)$ が成り立つか，ある x で $\varphi(x)$ の否定が成り立つ。

ここで，$\varphi(x)$ は任意の 1 変数条件である。例証のために，**ゴールドバッハの性質**：「x が 2 より大きい偶数ならば，x は 2 つの素数の和で表される」を考えよう。ゴールドバッハは，18 世紀のプロイセンの外交官であり，またアマチュア数学者で，すべての正整数がこの性質をもつと予想した[4]。ゴールドバッハの性質の否定は，「x は 2 より大きい偶数で，どんな 2 つの素数の和でも表せない」となる。領域が正整数のクラスであるとき，ゴールドバッハの性質の否定を満足するにはゴールドバッハの性質が満足されなければよい。QLEM によって，すべての正整数がゴールドバッハの性質をもつか，ある正整数がゴールドバッハの性質をもたないことのどちらかであることが導かれる。これは，まったく明らかであろう。さらに QLEM はもっと単純な論理的規則から導かれる。その論理的規則は次の 2 つである。(1) 排中律 (LEM)，つまり，θ であるか θ でないのどちらかであること。ここで「θ」は任意の文である。(2) 量化記号に対する否定の転移を支配する規則，すなわち，次の (i), (ii) が論理的に同値であるという主張：

(i) どの x も $\varphi(x)$ を満足する，というわけではない。

(ii) ある x で $\varphi(x)$ の否定が満足される。

QLEM は，これらの規則から，(明白な文脈において[5]) 言明の一部をそれと論理的に同値なものに置き換えることを許す規定によって導出される。

それでもなお，ヒルベルトの有限主義においては，QLEM は議論の領域が有限であると知られていない限り信頼できないものである。なぜそうなのかみるためには，全称的・存在的言明の有限主義者の解釈を考察しなければならない。ゴールドバッハの予想のような全称的言明は無限個の対象である正整数の特性を同時に表しており，

$$G(1) \mathbin{\&} G(2) \mathbin{\&} G(3) \mathbin{\&} G(4) \mathbin{\&} \ldots$$

という無限連言として解釈される。この解釈は，記述内容が無限を対象としてい

るので有限の立場としては受け入れられないものである。代替案として，ゴールドバッハの予想は，ある種の図式

$$\mathrm{G}(c)$$

で与えられるとする。これを受け入れることは，与えられた正整数に対してそれがゴールドバッハの性質をもつかどうかという質問が提起されれば，これに肯定的に答えられる一般的準備があるものとする。つまり，この図式を受け入れることは，任意に与えられた正整数を表す数項に対し，それを $\mathrm{G}(c)$ に代入した結果を証明する有限的手続きをもつということと同じである。$\mathrm{G}(c)$ は，そのすべての代入結果が真なることを指しているといえる。いま，一般図式の前に否定表現をおくことは，全称的主張の否定を意味せず，他の一般図式になるにすぎない。「$\mathrm{G}(c)$ でない」は「c はゴールドバッハの性質をもたない」のすべての代入結果が正しいことを指し示す。これは，$\mathrm{G}(c)$ の代入結果のすべてが正しいわけではない，ということを表さない。有限主義者の見解では，

すべての正整数がゴールドバッハの性質をもつわけではない

という文は何も表していない。図式的な解釈をもつこともない。よって，次の文は論理的に真でない。

すべての正整数はゴールドバッハの性質をもつか，あるいはすべての正整数がゴールドバッハの性質をもつわけではない。

これは，有限主義者の全称的言明の解釈では，LEM が全称的に正しいわけではないことを示している[6]。よって，上に述べた QLEM への道筋は有限主義者の立場では認められないのである。

QLEM が有限主義では正しくないことを示すために，存在的言明の有限的解釈も考慮する必要がある。存在的言明を理解する一つの方法は，それを無限選言と考え，各選言肢は 1 つの正整数が述語 $\varphi(x)$ によって表される性質をもつというものである。よって「G を成り立たせない x がある」は

$\mathrm{G}(1)$ でないか $\mathrm{G}(2)$ でないか $\mathrm{G}(3)$ でないか $\mathrm{G}(4)$ でないか ...

と理解される。このように読むと，存在的言明は有限主義者には受け入れられない自然数の無限性を内在していることがわかる。有限主義者の解釈では，存在的言明は有界であるか，そうでなければ不完全であり，命題の一部にすぎな

いものである。すなわち，不完全なところを補ってはじめて正当に何かを述べられるのである。有界な存在的言明の例としては「100 万より小さな 4 乗数で，4 つの 4 乗数の和で表されるものがある」というものがある。これは 100 万までの自然数を調べ尽くし確認することによって，検証あるいは反証することができる。しかし,「4 乗数で，4 つの 4 乗数の和で表されるものがある」というものは非有界存在文で，それゆえに不完全である。他の非有界存在文としては,「ゴールドバッハの性質をもたない正整数がある」というものがある。有限主義者によれば，我々が誤りなく主張できるのは，それが正しいとわかる範囲を特定できるときに限る。しかし，そのときでもその主張は不完全であって，したがって本物の命題でないのである。

QLEM に戻ろう。次の例を考える。

@　すべての正整数はゴールドバッハの性質をもつか，ある正整数はゴールドバッハの性質をもたない。

有限主義者には受け入れられないと思われる LEM がないときは，選言はその選言肢の 1 つが正しいと主張されているときに限って正しく主張される。したがって我々が @ を正しく主張できるのは，すべての数がゴールドバッハの性質をもつことを正しく主張できるときか，ある数がゴールドバッハの性質をもたないことを正しく主張できるときである。よって，有限主義者の全称的・存在的主張の解釈では，@ を正しく主張できるのは，任意に与えられた正整数 n に対し n がゴールドバッハの性質をもつことを証明する有限の手続きをもつか，限界 b を指定して，b より小さいある正整数がゴールドバッハの性質をもたないことを証明できるときに限る。我々はいまのところ手続きも限界ももっていないから，@ を正しく主張できない。有限主義者の立場では，QLEM をつねには真であると仮定できないのである。

有限主義とその趣旨：リアルな命題とイデアルな命題

前述のことから，有限主義の 2 つの考えが明らかにされる。一つは，議論の領域が無限である文脈においては古典論理の法則が成り立つとは仮定できないことである。もう 1 つは，議論の領域が無限である文脈においてはすべての文

が実際の命題を表しているわけではないことである。算術の定理[7]は，有限主義者が現実の (**リアル**な) 命題と考えることを表現していないものもあるし，しているものもある。同じ理由で，有限主義者は解析学や集合論のあらゆる定理に対してリアルと非リアルの命題を区別する。次節で述べる理由から，ヒルベルトは非リアルの命題を“**イデアル**な命題”とよんだ。リアルとイデアルの区別は高等数学に対する有限主義の立場では重要なものである。これを整理してみる価値はあるだろう。

リアルな命題とは“有限の内容”をもつ文である。それらは，厳格に有限なものと，有限的で一般的なものに分かれる。厳格に有限な文は以下の条件を満たさなければならない。

(a) 項 (名詞句) の表記は知覚でき完全に把握できるか，あるいはそのようなものに同型な代表をもたなければならない。例えば，各正整数 n は，n 個の連続した短い縦線 (ヒルベルトの数項) や 1 個の「0」の前に n 個の「s」を並べたもので表される。

(b) 複合項の表記は，その構成要素から有限ステップで計算可能でなければならない。したがって「$3 \times (7+6)$」は受け入れられるが「n が無限に増加するときの $[1+(1/n)]^n$ の極限」は受け入れられない。(ここで，数字は単独の語とみなされる。複数桁の数字も単独の**項**であって複合**記号**ではない。)

(c) 述語は，条件 (a), (b) を満足する項に対して決定可能でなければならない。これは，n 変数述語は (a), (b) を満たす n 個の任意の項に対して，その述語が真になるかが有限個の確定したステップで決定する方法がなければ受け入れられないということである。例えば，算術の命題「$x < y!$」,「$\neg(x=0)$」,「$w \times z^2 + y \times z^1 = 0$」は決定可能である。

(d) 文の結合記号や演算子は真理値関数でなければならない。これの意味するところは，結合記号でつながれた複合文の真理値はその構成要素となる各文の真理値から有限ステップで計算されなければならず，文と演算子を結合して得られている文の真理値は，構成要素の文の真理値から有限的に計算できなければならないということである。

(e) 量化記号は有限の範囲で限定されなければならない。

これら (a)–(e) を満たす文だけからなる数学の分野は格段の明瞭さをもつ。すなわち，この部分のすべての文の真理値は有限ステップで確定した手続きによって決定可能である。しかし，この範囲ではどんな一般性も表現可能ではなく，有限主義の立場からでさえ確かに受け入れられるような主張も排除してしまうようにみえる。このことを，正整数に対する**ヒルベルトの数項** I, II, III, IIII, . . . を用いて説明しよう。数の 1 は「I」，2 は「II」によって表される。2 つの正整数の加法はそれらのヒルベルトの数項を繋いで，それらの和のヒルベルトの数項をつくることで表される。どのようなときに 2 つのヒルベルトの数項が等しいかを知る単純で有限的な方法がある。それは次のようなものである。それらの数項を書き下し，それぞれの数項から同時に 1 本づつ縦線を消去していく。これをどちらかが完全に消されるまで繰り返す。この操作を終えたとき，両方が完全に消去されたならば，それらのもとの数項は等しい。そうでなければ，完全に消されたほうのもとの数項が小さいのである。これを用いて「$c+1=1+c$」の c を数項に置き換えて得られる任意の等式に対し正しいことを論証する明白に有限的な方法が得られる。

このような理由で，ヒルベルトは等式やその類のものをイデアルでなくリアルな命題とみなしたが，それらが問題のある特徴をもつことも認めていた[8]。それらはその全称性によって，厳格に有限的な言明とは区別される。これを**有限的全称**言明とよぼう[9]。(算術の) 有限的全称項は，変数か，1 つ以上の自由変数を含む複合項で，そのすべての変数に数項が代入されたときにその値が計算可能なものとする。有限的全称言明は有限的全称項間の等式だけでなく，いくつかの有限的全称項を含む論理式で，変数に数項が代入されたときに (真偽が) 有限的に決定可能なものも含む。これらは有限主義の問題点である。その内容が無限集合への言及を暗黙に含むようなとき，なぜイデアルでなくリアルな命題とみなされるべきかを説明するのは難しいからである。

ヒルベルトもベルナイスもこの問題に実際には取り組んでいない。これを確かめるために，等式「$c+1=1+c$」に立ち戻ろう。この問題のポイントは，この文脈における c をどう理解するかである。有限主義を把握するため，とりあえず次のような状態になったときに c を適切に理解したことにしよう。任意の算術的な条件 $\varphi(x)$ で有限的に決定可能であると認められているものに対し，(i) $\varphi(c)$ の代入結果 $\varphi(1), \varphi(2), \ldots$ のどれを選んで問うても $\varphi(c)$ から導くことがで

き，(ii) 代入結果のどれかが否定されると $\varphi(c)$ が否定される[10]。明らかに，この“状態の説明”は無限集合 (すべての数項) への言及を含んでいる。しかし，同じくらい明白に，その状態は無限集合を考えることなく保持でき，働かすことができる。等式「$c+1=1+c$」の任意の代入結果によって表現される命題を受け入れるということは，正整数の無限集合を考えることを要求しない。というのも，その状態を得るには各数項で表現された概念は理解できなければならないが，正整数の一般的な概念を理解している必要はないからである。よって，等式「$c+1=1+c$」で表現された思考は正整数の一般的な概念を含まず，

任意の正整数 n に対し「$n+1=1+n$」

といった思考とは異なるものである。同じように，この思考には数項の一般的な概念を必要としない。よって

任意の数項 α に対し，「$c+1=1+c$」の c を α で置き換えて得られるものは真である

といったメタ議論の思考とも異なるものである。どんな無限対象や集合への言及も含まないので，この思考は有限的である。その代入結果を検証する有限的手続きがあるので，イデアルというよりはリアルな命題とみなせる[11]。したがって，算術の一般性が本質的に無限思考に依存するという非難は正当なものではない。

まとめると，リアルな命題は厳格に有限なものと有限的全称のものとの 2 種類に分かれる。数学の他の言明はすべてイデアルな命題である。それらは，無理数や，すべての整数上で定義された関数や，2 つの整数の間のすべての有理数や，最初の無限基数などといった，無限領域上の量化や無限な対象への言及を含む。算術，解析学，集合論は，すべてリアルな命題もイデアルな命題も含むのである。

道具主義

数学の有限でない部分の定理はリアルな命題ではなく，それゆえそれらは真でないという有限主義者の見解を受けて，有限的な部分を越えた古典数学，特に解析学は無差別に排除されるべきだとの声があがるかもしれない。なぜなら

それはヒルベルトが指摘したように，集合論の主要部分と同じように無限への明らかな言及に満ちているからである。しかし，ヒルベルトは解析学と集合論の頼りになる弁護人だった。彼は，解析学のことを「無限の交響曲」と描写し，カントルの超限数の理論を「数学の理知の中に咲いたもっとも見事な花で，... 人間の純粋に理性的な活動の中でもっとも高度に達成されたものの一つ」と表現している。彼の目標は，排除運動から解析学や集合論を守ることであった。「カントルが我々のためにつくり上げてくれた楽園から我々を追い払うことは，誰にもできないだろう」というヒルベルトの言葉は有名である[12]。

ヒルベルトはどのようにして矛盾なくカントルの超限数の理論を擁護し，同時にまったくの空論であるとしたのだろうか。その答えは，カントルの理論を学問体系ではなく，有限的な真実に到達するのに役にたつ道具とみなすことにあった。この道具は，美しさの観点からも実に見事なものであり，また，我々に有限的な真実の形式的証明 (有限的な証明より単純でみつけやすい) を与えてくれるとても有用なものである。特に，古典論理の形式的法則の使用を許してくれる。それらは無限領域を明示する理論の有限的な部分では一般には成り立たないものである。量化排中律が成り立たない場合，したがって，量化相互定義可能律や否定遷移律 も成り立たないとどのようなことになるかはすでにみてきた[13]。有限的数学への閉じこもりは，便利さと単純さの深刻な喪失をひきおこすのである。

ここに有限的でない数学の正当化を探求する現実的な動機がある。論点を明らかにするため，ヒルベルトは数学的なたとえを用いた。幾何学において，イデアルな要素として無限遠における点や直線を導入することによって双対性の法則[14]が単純になり，解析学において虚数 (ir の形の項，ここに r は実数で $i=\sqrt{-1}$) を導入することにより実根をもつ方程式ともたない方程式を一様な方法で取り扱うことができるようになる。同じようにして，理論の有限的でない定理をイデアルな要素とみなし，有限的な定理であるリアルな要素に加えることで，古典論理の規則を保つことができる。もちろん，イデアルな要素や規則を加えることは妥当なものでなければならない。妥当性として，イデアルな要素を導入することで得られる規則によって導かれる実際の要素に関する結論は，正しいものであるということが要求される。有限的でない理論の場合，有限的でない文や古典論理によって得られる有限的帰結は，正しいものであると

いうことが要求される。これらが成り立つとき，有限的でない理論が有用な道具になる。

ヒルベルトが集合論や解析学に対する道具主義者としての見解を提唱していたころ，物理学でも似たような見解が広まっていた。特に，一般相対性理論や量子論のような観測可能な状態の一般化からできたものでない理論は，命題の集まりでなく観測によって検証可能な予想を導く道具とみなされるときもある[15]。ヒルベルトはそれらの類似性を示し，彼の有限的でない数学という見地がゲームにすぎないという非難に応えた。

> 「各々の論理式がそれ自身で意味をもつと普遍的に要求するのはまったく筋が通らない。それどころか本来理論とは議論の中の直観や意味に頼る必要のないものである。物理学者が理論に対して本当に要求することは，個々の命題が自然の法則や仮説から推測だけによって (ゆえに，純粋な論理式のゲームに基づいて) 外部の理由づけによらずに導かれることである。実験によって確かめられるのは，ある種の物理的法則の組合せと帰結だけである。それは私の証明の理論においてリアルな命題だけが検証可能であるのとまさに同じことである。」[16]

説明を補足しよう。リアルな命題は，ここでは虚偽や偽りの命題でなく，イデアルな命題と対比されている。よって，ヒルベルトが意味検証主義者の見解を支持したと推測するのは誤りであろう。むしろ論点は，我々の理論の中の確認できない文を解釈する必要はないというところであろう。それらの文は純粋に形式的方法で取り扱われる。重要なのは，確認できる部分が真なることである。

もちろん，解析学や集合の道具主義提唱者は次の問題に突き当たる。どうすれば道具が信頼できるものであることがわかるのだろう。どうすればその有限的な定理が真なることがわかるのだろう。どうすればイデアルな部分が実際の部分に矛盾を引き入れないことがわかるのだろう。クラスパラドクスを考慮すると，これらは的を射た問いである。

有限的論証 (主題)

解析学や集合論が信頼できることを証明するためには，もはや証明の必要がないような信頼性をもった論法が要る。ヒルベルトの見解のこのような根底にあるものが有限的論証である。有限的論証における手法や定義・導出の規則や，

それらの適用の際の制約は，一般の真実の証明可能性と両立しうる最大限の安全性を我々に与えるようつくられている。有限的論証の主題は人間の意識にとってわかりやすいものでなければならない。「任意抽象的定義」に基づくような難解な主題に対してはその手法が適用可能な限りにおいて，その適用は有限的論証から外れるだろう。ヒルベルトは有限的主題の特徴づけを次のように与えた。

> 「論理的推論と論理的演算の実行の条件として，我々の表現能力においてあらかじめ与えられているものがある。すなわち，論理によらない具体的な，すべての思考に優先する直接経験として直観的に与えられている対象がある。もし論理的推論が信頼できるものならば，それはそれらの対象全体を完全に調べることができる。そして，それらが出現すること，互いに異なること，互いに従い，あるいは結びつくという事実は何にも還元されず，還元される必要もないものとしてそれらとともに直ちに直観的に与えられる。」[17]

これで完全に明らかになったわけではない。というのは「直観的に」，原文でいえば「anschaulich(独語で『具体的な』の意)」というやっかいな言葉を含んでいるからである。「すべての思考に優先する直接経験として直観的に与えられている対象」を，知覚したことから推測もしくは抽象したものではなく，直接知覚したものを意味すると解釈することにする。一般に,「直ちに直観的に与えられた事実」とは，知覚したことから推測されるというよりは直接知覚したことと解釈しよう。しかしこの解釈では少し偏狭すぎるかもしれない。視覚的想像の明確で安定したイメージで表現された対象や状況をも直観的な存在に含まれるのかしれないのである。

ヒルベルトと彼の共同研究者は，集合論，解析学，数論がその有限的でない部分を含めて純粋な形式体系として設計できることを示した。よってそれらの体系についてのどの研究も，純粋な形式的対象，具体的にいえば，有限個の原始記号，記号の有限列，そのような記号列の有限列についての研究である。さらに，調査する性質も純粋に形式的である。つまり,「体系の原始記号である」,「項である」,「論理式である」は記号や記号列に関する純粋に形式的な性質であり,「導出である」は論理式の有限列に関する形式的性質である。これらにより，一見したところ，形式的体系はヒルベルトの前提条件や有限的論証の妥当な適用が望めるように思われる。第一に，記号や記号の有限列やそのような列の有限列やそれらの構成成分は知覚でき，把握できる対象である。我々はそれら各々

を他と区別でき，どんな有限配列においてもそれらの空間的関係がまったく明瞭である。第二に，与えられた符号がその体系の記号であるか，与えられた文字列が項であるか，与えられた列が論理式であるか，与えられた論理式が理論の公理であるか，これらは知覚的確認でいつも決定可能である[18]。論理式の列において，論理式から論理式への移行が形式的規則に従っているか否かもまた知覚的に決定可能である。その結果として，与えられた文字列の有限列が形式的導出であるかどうかも知覚的に決定可能である。

有限的対象に関する 2 つの問題

しかしながら，ヒルベルトの有限的対象の特徴づけに関して二，三の問題がある。そのうちの一つは，単一の形式的対象を表す物理的意味での記号 (**トークン**) と，その記号の共通形式 (**タイプ**) を区別すると明確になる。ここに，同じタイプの 2 つのトークン，アルファベットの最初の大文字 A A がある。どちらのトークンも具体的知覚可能な対象である。しかしそのタイプは抽象概念である。この場合，トークンは位置をもつが，タイプは位置をもたない。トークンは直接に知覚可能な対象であるが，タイプはあるトークンの知覚から抽象されることによってのみ認識できる。実際，我々は 2 つの文字が同じタイプのトークンであることを知覚できるが，我々が見ることのできる対象はタイプそのものではない。

さて，ヒルベルトが記号について語るとき，例えば「→」を論理的記号のリストに入れるとき，彼はタイプについて語っている。彼は原稿のある特定のインクの印や，出版物に印刷された対応するインクの印について語っているわけではない。したがって，研究の対象の記号は，引用文でみたようにヒルベルトが要求したと思われるような具体的知覚可能な対象ではない。似たようなことが論理式や導出にもあてはまる。ヒルベルトが実数論の形式化において論理式‘$1 \neq 1$’が証明されないことを示そうというとき，明らかに論理式のタイプについて言及しているのであって，特定のトークンを指しているのではない。よってヒルベルトの企ての内容は，所定方法の合理的適用について彼自身が述べている基準にあてはまらない。これがタイプ–トークン問題である。

これは深刻な問題ではない。有限的方法が妥当に適用されるべき主題へのヒ

ルベルトの要求が，彼の意向に比して厳格すぎるのである。以下のような抽象的対象を有限的主題とみなせば，有限主義的な確実性が異議を唱えられることはないだろう。その抽象的対象のトークンは具体的知覚可能で，(i) 適切な文脈中に与えられた知覚可能な符号がそのトークンであるかどうか知覚によって直接わかり，かつ (ii) そのトークンの 1 つの有限的観察によって正しさがわかるような性質だけを抽象的対象の属性として考える。与えられた記号列 (のタイプ) が「論理式である」という場合，その主張の真偽はその文字列のトークンの観察によって確認できる。「$1 \neq 1$ で終わる導出 (のタイプである)」という場合も，導出のトークン，すなわち，その物理的記号列を観察することによって確認できる。我々が語りたいと思うものがそれらのトークンの知覚的観察によって確認できるならば，抽象的対象へ有限の推理を適用することは認識論的な喪失，すなわち確実性の損失を招くことはない。

第二の問題は現実の限界の問題で，ある論理式や論理式の列が知覚的確認にはあまりに長すぎるというものである。時空全体の素粒子の 10 倍の個数のトークンをもつ論理式は物理的に実現できない。もし実現できたとしてもだれもそれを検査できないであろう。そんな怪物も原理的には検査できるといってすませたくなる。どんな論理式も，より豊かな時空で我々以上に知能的に発達した生き物ならば検査できるかもしれない。しかしこれで満足とはいえない。例えば，論理式の長い列が記述され，それが導出であることを実際問題として証明も反証もできないとしよう。このときそれが導出であるかどうかを知るには，その列のトークン全体を検査しなければならない。もしそのような検査ができないならば，その列が導出であるか否か知ることができない。ある物理的に富んだ可能世界の超人間がその検査を行えるなどということはまったく的外れなことである。彼らはその列が導出かどうか知ることができるかもしれない。しかし，それは**我々**が知ることができるかとはまったく関係ない。よって，ヒルベルトが記述した必要な条件のさらなる緩和が必要になる。

ヒルベルトと彼の共同研究者であるパウル・ベルナイスの著作を手にとってみてみると，論理式のトークンはほとんど現れていないのがわかる。実際には彼らの仕事はすべてメタ言語，すなわち数学の理論の形式言語を語るのに使う言語を用いた枠組みでなされている。メタ言語の中の論理式は研究される体系の論理式の図式となっている。彼らは図式を，形式体系の公理や導出規則を記

すのに，またその定理に関する一般的な主張を記すのに用いた。例えば，数論の論理的部分を形式化するのに，ヒルベルトとベルナイスは，次の図式の代入結果である任意の論理式は公理であると規定した。

$$A \to (B \to A)$$

これにモーダス・ポーネンス (三段論法) による推論として次の図式の代入結果を加えた。

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

もちろん，論理式が公理図式の代入結果であるとはどういうときか，論理式の列が推論図式の代入結果であるとはどういうときか，が明確でなければならない。それは図式中の同じ文字は同じ論理式で置き換えられたものである。すると，これらの公理とモーダス・ポーネンスをもつ形式体系において，次の一般的な主張が得られる。

A が公理ならば，F → A は定理である。

これは次の単純な導出図式によって得られる。

$$A$$

$$A \to (F \to A)$$

$$F \to A$$

いま，上の主張を得るには,「A」が任意の公理に置き換えられ,「F」が任意の論理式に置き換えられたときに，導出となるような図式のトークンであることを確かめる必要がある。この際に，怪物を含むすべての論理式の検査が可能である必要はない。この最初の 2 つから最後への段階が特定の導出規則の代入結果であり，2 行目の論理式図式の任意の代入結果が特定の公理図式の代入結果であることがわかれば十分である。なぜなら，こうすればこの図式に適合する任意の論理式の列は導出であること，すなわち，列に現れる論理式は公理であるか前の論理式から導出規則によって得られるものになっていることがわかるからである。このようなことが，列図式のトークンと，公理図式や導出図式のトークンの検査によって実際的に確認できる。一般の状況は図 3.1 で与えられている。

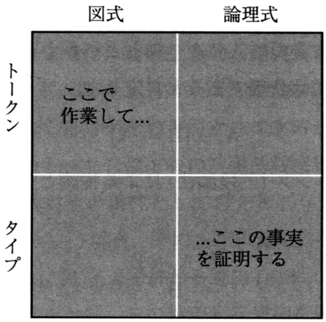


図 3.1

このようにして，怪物のような長さの論理式の認識論的問題は解決できる。もしメタ言語が「論理式」だけでなく「論理式列」の図式的変数をもつならば，同じように怪物のような長さのものを含む導出に関する言明を証明できない理由はないことがわかる。これから，論理的推論の妥当な使用に関してのヒルベルトの条件の記述は，推論で使われる図式が実際に我々が検査できるトークンをもつならば，その図式の代入結果として表される推論も含むように緩和されるべきだということが帰結される。

有限的論証 (方法)

ヒルベルトとベルナイスによって，有限的証論の方法はスコーレムの自由変数算術と同一視された。この算術は，現在，**原始再帰的算術** (PRA) として知られるものと同値である[19,20]。我々はこれを厳密な計算の理論と考えることができる。その公理は単純な項から複雑な項を定義する原理を含む。このような方法で定義された関数項は，任意に与えられた入力に対する値が計算可能である。したがって，基本的な表示項 (例えばヒルベルトの数項) と基本関数記号から規定された方法で組み立てられる任意の項の値は有限的方法で算出される[21]。これらの項を**原始再帰項**とよぼう。原始再帰項の間の等号や不等号の真理値は，それらの項の値を計算し比較することによって決定される。真理関数結合子 (すなわち連言，選言，否定) を用いて得られる文の結合の真理値はそれら文の真

理値から計算されるから，原始再帰項を結ぶ等号・不等号から得られる任意の真理関数結合の真理値は計算できる。ここでの計算はふつうにそうあってほしいと思うようなもので，入力値の有限列から厳密な規則に従ったステップの有限列 (いい換えれば，プログラム，すなわち適切な命令の有限列) によって出力値を決定するものになっている [22]。これに関する例がこの章の補遺 A にある。計算は PRA の証明として表現される。

有限的論証の公理は，命題論理の公理 (例えば A → (B → A) の代入結果) や等号の公理 ($\tau = \tau$ の代入結果)，ライプニッツの法則 (等しいことが証明された項と項を置き換える) [23] からなる。規則としては，代入の規則とモーダス・ポーネンス，そして問題を生じやすい自由変数帰納法の公理または規則である。以下では，規則の形で自由変数帰納法を示す。

$$\frac{\varphi(1), \varphi(y) \to \varphi(\mathrm{s}y)}{\varphi(y)}$$

ここで「y」は数変数を表し,「sy」は「y の後続者」と解釈する [24]。

有限的一般命題に対して証明らしきものが有限主義者の立場から受け入れられるものになるはどのようなときか。その証明らしきものから，一般命題の任意の代入結果の有限的証明を得る有限的手続きを手に入れた場合である。例えば，$\varphi(y)$ の証明らしきものから，任意の数 n に対し,「y」の出現をすべて n の数項によって置き換えることで $\varphi(n)$ の証明が得られるときには，その証明らしきものは真に有限的なるものの基準を満たした証明となる。この章の補遺 B にその例がある。

しかし，帰納法による証明は，単に帰納変数に数項を代入するだけでは，求める代入結果の証明にはならない。

[a] $\varphi(1)$ かつ

[b] $\varphi(y) \to \varphi(\mathrm{s}y)$

から

[c] $\varphi(y)$

を推論する有限的証明があるとせよ。これは帰納法の適用例である。いま，数項を「1」および「1」の前に「s」の有限列をつけたものとする。ここで，例えば，[a], [b], [c] の「y」を「ss1」に置き換えても $\varphi(\mathrm{ss}1)$ の証明を得ることはでき

ない。すべきことは，[a], [b] の後に [b] の 2 つの代入結果

[b1]　$\varphi(1) \to \varphi(s1)$

[b2]　$\varphi(s1) \to \varphi(ss1)$

を付け加え，[a] と [b1] から

[c1]　$\varphi(s1)$

を得，そして

[c1] と [b2] から

[c2]　$\varphi(ss1)$

とするようにモーダス・ポーネンスを 2 回適用することである。この結果は [c] の求める代入結果の明らかに有限的な証明である。そして，このやり方は任意の $\varphi(n)$ の代入結果の有限的証明に一般化できる[25]。有限的論証の概略はこれで終えよう。

結　　論

“有限主義” と称されるものには 3 つのまったく異なる立場がある。それらはすべてヒルベルトの著作によるものである。存在論的有限主義は，無限は存在しないというものである。意味論的有限主義は，無限的な存在について言及する文は本当の命題を表現していないというものである。認識論的有限主義は，有限的論証は無理なく要求できる程度に安全であり，古典論理を用いた有限的でない論証は不確実さをもたらすが，有限的でない数学の形式的対応物が不合理さを招かないということを有限的論証によって示せるであろう，というものである。

筆者が知る限り，存在論的有限主義や意味論的有限主義を受け入れる妥当な理由はないが，認識論的有限主義は違う。有限的論証，特にその原始再帰的算術による具体化は並外れた安全性をもつ。これは，単純で厳密な記号操作規則，つまり有限的なものに対する妥当性が基本的視覚能力によって明白であるような規則の適用を超えるものは何も必要としないという事実による。これはデカルトの包括的な懐疑を寄せ付けないものではない，というのは正しい。おそらく，その懐疑を打ち砕くものなどないし，それを要求するのは無理だろう。有

限的論証を支持する主張は，それが当然望む程度の確実さを与える，というものである。これに反対し，とても長い，あるいは複雑な記号列の操作をする際には誤りを犯しやすく，不確実性の原因になりうるということもできる。しかし，特定の操作の列が与えられれば，その列の各段階で存在するものを残らず確認することで，与えられた記号操作の規則にかなっているかをつねに確かめられる。あいまいさや多義性から誤りが起きる可能性はない。その種の誤りは記号列の解釈によって，また記号列そのものではなくその解釈上の操作によって起こるものだからである。さらにいえば，誤った記号操作がからむその種の過失によってパラドクスが生まれたのではなかった。実際，過失ということで，つまり我々が認めた規則や法則を守らないということでパラドクスが生じたことはない。問題はそうでなく規則や法則にこそあるのである。例えば，クラスパラドクスは，任意の明確な条件に対し，その条件を満たすすべての存在物からなるクラスがあるという法則に依存するものであり，これは有限的原理とは程遠いものである。したがって，有限的論証は有限的でない数学を脅かすこの種のパラドクスの餌食にはならない。

ヒルベルトが目指した数学の基礎づけの達成にとって，認識論的有限主義だけが価値あるものであった。存在論的有限主義や意味論的有限主義を整合的に排除し (あるい取り組むのを避け) ながら，次のことを受け入れることができる。ヒルベルトとその共同研究者たちが集合論の無矛盾性に対し健全な有限的論証を与えたならば，それによってその結論は相当な疑いを乗り越えて確立されたことになる。実際，基礎づけの研究における有限的論証の道具としての利点の一つは，その信頼性がほとんどすべての哲学の学派に受け入れられるという事実にある[26]。だからヒルベルトが，有限的論証がパラドクスの幽霊を鎮める光になると期待したことは不合理ではなかった。どのようにヒルベルトとその共同研究者たちがこれを達成できると考えたのかが次の章の話題である。

補　　遺

A. 定義と計算の例

再帰法による 2 つの定義をあげる。一つめはカットオフ前者関数 p である。

$$\mathrm{p}(1) = 1; \quad \mathrm{p}(\mathrm{s}x) = x.$$

二つめはカットオフ減法関数 $y - x$ である。

$$y - 1 = \mathrm{p}(y); \quad y - \mathrm{s}x = \mathrm{p}(y - x).$$

以下がこれらを用いた sss1 − s1 の値の計算である。

sss1 − s1	
p(sss1 − 1)	(− の定義による)
p(p(sss1))	(− の定義と置き換えによる)
p(ss1)	(p の定義と置き換えによる)
s1	(p の定義と置き換えによる)

B. 有限的一般命題の帰納法を用いない有限的証明

本文では言及されていないが，演繹可能な次の規則を用いる。「= の推移性」は，$\rho = \sigma$ と $\sigma = \tau$ から $\rho = \tau$ を導出する規則である。ここで導く主張は [a]: $\mathrm{s}x - \mathrm{s}1 = x - 1$ である。以下がその証明である。

(1)	$\mathrm{s}x - \mathrm{s}1 = \mathrm{p}(\mathrm{s}x - 1)$	(− の定義による)
(2)	$\mathrm{p}(\mathrm{s}x - 1) = \mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{s}x))$	(− の定義と置き換えによる)
(3)	$\mathrm{s}x - \mathrm{s}1 = \mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{s}x))$	((1) と (2) から = の推移性による)
(4)	$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{s}x)) = \mathrm{p}(x)$	(p の定義と置き換えによる)
(5)	$\mathrm{s}x - \mathrm{s}1 = \mathrm{p}(x)$	((3) と (4) から = の推移性による)
(6)	$\mathrm{p}(x) = x - 1$	(− の定義による)
(7)	$\mathrm{s}x - \mathrm{s}1 = x - 1$	((5) と (6) から = の推移性による)

この導出から，$\mathrm{s}n - \mathrm{s}1 = n - 1$ (「n」は数項を表す) の有限的証明を得るには，単にすべての「x」を数項 n に置き換えればよい。

4

ヒルベルトのプログラム

正当化

ヒルベルトは，算術[1]，解析学，集合論を信用して用いることの正当化を目指していた。この仕事への自然なアプローチとして，包括的な理論に対する公理となりうる疑いようのない真理と，さらに明白に真理を保つ推論規則を探す，ということがある。これがフレーゲのアプローチだったと考えられる。しかし，その後の矛盾の発見によって，ラッセルはその公理の正しさについて疑念が避けられないと結論を下した。ラッセルの見解では，望むことのできる最善のものは，公理をそのわかっている帰結から帰納的[2]にうまく裏づけることだった。それゆえに，ラッセルは認識論的基礎と推論的基礎を区別した[3]。この方法によって，ラッセルは革命を半分成し遂げていた。認識論的基礎は今日，擬経験的帰納を伴うもっとも単純でもっとも明白な数学の真理を形成するとみなされている。しかしながら，目標は，すべてではないとしても，ある程度の疑いを克服し，公理の真理を打ち立てることであった。許される手法ではこの目標には不十分であり，ラッセルは，要求された水準に達していると思えるような十分強力な公理の集まりをみつけることができなかった。もしも彼が包括的な理論を創るという目標をあきらめ，実解析や超限集合といった話題を別々に扱うと決断しても，結局うまくいかなかっただろう。デデキントの連続公理，無限公理，選択公理の問題を思い出してほしい[4]。

解析学と集合論の正当化はこれまでとは違った方法でなされるに違いない。基礎づけのプログラムとして成功するものには，ラッセルの目標より穏当な目標か，あるいはそれを達成するより確実な方法が必要になるだろう。ヒルベルトのプログラムはその両方を満たしていた。目標はもはや算術，解析学，超限集合の理論の“真理”を確立することでなく，それらの有限的信頼性を確立す

ることであった。この目標を達成するための許される手法は，擬経験的な帰納法でなく有限的論証の方法であった。理論は，有限的な偽の帰結をもたないときに有限的に信頼できる。よって，ヒルベルトのプログラムの目標は，彼のリアルとイデアルの命題の区別の言葉を使えば，算術のイデアルな命題と，単純化された古典論理の法則を用いて得られる帰結で偽なるものはない，そして同じことが算術の代わりに解析学や集合論でも成り立つ，ということを示すものであった。要するに，有限的でない手法を正当化するために，それらの手法で得られる有限的言明が正しいこと，そしてそれ自身を有限的手法で示されなければならない，ということである[5]。用いられる有限的手法は，高度な数学の公理からはかけ離れた，算術の一部である原始再帰的算術として捉えられる。

したがって，ヒルベルトのプログラムは，フレーゲの基礎主義をひっくり返すことでラッセルによってもたらされた革命を完成させたのである。フレーゲは彼の体系の公理や規則の信頼性を仮定したのに対し，ヒルベルトにとって公理や規則の信頼性は証明すべきものであった。このヒルベルトとフレーゲの関係は，マルクスとヘーゲルの関係と同じようなものだ。これはきわめて理にかなった革命である。有限的な算術は，フレーゲの体系はいうまでもなく，解析学や集合論よりも我々にとって明瞭である。ヒルベルトがこのアプローチを思いついただけでも大変な賞賛に値するだろう。だがそのうえ，彼と共同研究者であるベルナイスは巧妙な戦略を展開していたのである。

戦略，第一部 (形式化)

戦略は 2 つの部分に分かれる。第一の部分は算術，解析学，集合論を完全に精密な形式体系として設計することである。第二の部分は有限的な手法によってそれらのどの体系からも有限的偽が導かれないことを示すことである。算術，つまり 1 階のデデキント–ペアノの算術の確実性はほとんど疑いようがないものであったので，主な関心は解析と集合論にあった。しかし，デデキント–ペアノの算術は有限的算術，すなわち原始再帰的算術をはるかに超越したものなので，この戦略のそこでの成功は，解析学や集合論を取り扱う際の重要な予行演習となるだろう。

この戦略の第一の部分は比較的容易であるが，自明ではない。関連する理論

は確かに公理化されているが，形式化はさらに進んだものである。**形式体系**は単に公理や導出規則の集まりではなく，完全に明示された定理生成器をもつ完全に明示された言語である。これらの専門用語は説明の必要がある。まず，問題に対して答えを返す方法が**エフェクティブ**であるとは，正確で決定可能な全面的に信頼できる手続によって有限のステップで終了することをいう。これを用いて次が定義できる。

(I) **形式言語**は，原始記号の有限リストと，与えられた原始記号の列が論理式であるか否かをエフェクティブに決定する方法を明記した構成規則の有限リストからなる。

(II) **形式的定理生成器**は以下のものからなる。まず，任意の論理式が公理か否かをエフェクティブに決定する方法を伴う**公理**の集まり。さらに，明示的に与えられた論理式の有限列の最後の論理式が前の論理式からその規則を適用することによって得られるかどうかをエフェクティブに決定する方法がある**導出規則**の有限集合。

さらに，形式体系における導出と定理の定義を与えて形式体系の説明は終えよう。形式体系 T に対し，T の**導出**とは T の言語の論理式の有限列であって，それぞれの論理式が T の公理であるかその列の先行する論理式から T の導出規則の一つによって得られるようなものである。T の**定理**とは，T のある導出の最後の論理式になっているものである。これらの定義から，与えられた T の論理式の有限列が T の導出であるか否かをエフェクティブに決定する方法があることがわかる[6]。

戦略，第二部 (信頼性と無矛盾性)

算術，解析学，集合論の形式化という仕事は，ラッセルやホワイトヘッドの努力によってかなり容易になっている，ヒルベルトとその弟子たちはそう認めていた。残っているのは先の条件 (I), (II) を明確に満たすように，これらの理論の形式体系を構成することだけである。その後でこの戦略の第二部がはじまる。こちらは大変な部分である。課題は，算術，解析学，集合論の形式体系が偽の有限的帰結をもたないことを示すことである。ここで,「偽」というのは形

式的概念というよりは意味的概念であるということが直ちに問題になる。これを有限的手法で扱えるようにするには，この課題を再定式化しなければならない。ここで扱う形式体系はすべて有限的算術を含む。つまり，有限的算術の言語からここで扱う形式体系の言語への翻訳で，算術における厳密に有限的な真理がすべて形式体系の定理へと翻訳されるようなものが具体的に提示できるとする。さらに明確に述べよう。T はある数学的理論の形式化であるとする。T の定理で有限的主張の形式化であるものを T の**有限的定理**という。このとき，有限的算術の T の形式言語への翻訳は以下の条件を満たす。S を T の有限的定理の集合とすれば，S は算術における厳密に有限的な真理の翻訳をすべて含む。これから，T の信頼性，すなわち T が偽な有限的帰結をもたないことを確立するには，ある特定の有限的偽，例えば「$1 \neq 1$」，の T の言語への翻訳が T で導出できないことを示せば十分であることがわかる。よって真や偽といった概念が論証の中に導入される必要はない。すべては，T の導出でその最後の論理式が「$1 \neq 1$」(あるいは，何か指定された他の厳密に有限的な偽) の T 翻訳 *) であるものはないという純粋に形式的な主張を確立することに還元される。

どうしてこれで十分なのか。算術や解析学の場合は答えはまったく簡単である。以下,「$1 \neq 1$」や「$1 = 1$」でそれらの T における翻訳も表すことにする。いま，T を算術または解析学の形式体系とし，S をその有限的部分とする。S の文はすべて算術的文になり，それらは算術における厳密に有限的な真理の翻訳を含む。議論には，これら体系の形式的論理に関する 3 つの事実を用いる。第一は，φ が T で導出でき，χ が T で導出できるならば，それらの連言 $\varphi \& \chi$ も T で導出できる，というものである。これは & **導入**として知られている。第二は，ある論理式とその否定の連言 $\varphi \& \neg\varphi$ が T で導出できるならば，他のどんな論理式も T で導出できる，というものである。これは**矛盾効果**として知られている [7]。第三は，自由変数 x をもつ一般の論理式 $\varphi(x)$ が T で導出可能ならば，任意の数項による代入結果 $\varphi(n)$ も T で導出可能というものである。これは**全称代入**規則の亜種である [8]。簡潔にするため，T の論理式が有限的真 (偽) の形式化であるとき，その論理式を有限的真 (偽) とよぼう。議論は以下のように行われる。φ を T の偽な有限的定理とする。このとき 2 つの可能性がある。(i) φ は厳密に有限的である，または，(ii) φ は有限的一般言明である。それぞ

*) T の言語への翻訳のこと。

れの場合について順に考察しよう。

(i) の場合，$\neg\varphi$ は算術における厳密に有限的な真理であり，S に属す。S に属する文はすべて T の定理になるから，$\neg\varphi$ は T で導出可能である。仮定より φ は T で導出できるから，矛盾 $\varphi \& \neg\varphi$ が T で (& 導入により) 導出可能である。よって「$1 \neq 1$」が T で (矛盾効果により) 導出可能になる。

(ii) の場合，φ はある偽な代入結果 χ をもち，その否定 $\neg\chi$ が算術の有限的真理になる。$\neg\chi$ は S に属する。S の構成要素は T の定理になるから，$\neg\chi$ は T で導出可能である。仮定により，φ は T で導出でき，よって χ は (全称代入により) T で導出できる。したがって $\chi \& \neg\chi$ は T で導出可能で,「$1 \neq 1$」が T で導出可能となる。

この結果，ある偽な有限的論理式が T で導出可能ならば,「$1 \neq 1$」も導出可能になる。(逆は自明である。)　これから，偽な有限的論理式が T で導出されないことを確立するには，この 1 つの論理式が T で導出できないことだけを示せばよいことがわかる。集合論に対する議論も本質的に同じであるが，もう少し複雑であるのでここでは取り扱わない。

これは一体，無矛盾性とどう関係するのだろうか。我々が関心のある体系に関しては，体系の無矛盾性と偽の有限的論理式がその体系で導出されないことは同値である，というのがその答えである。後者を示せば，前者を示したことになるのである。形式体系が**無矛盾**であるとは，その体系の言語の論理式で，それ自身とその否定がともにその体系で導出されるようなものはない，ということである。同値性は以下のように示される。「$1 \neq 1$」が T で導出されるとする。S はすべての有限的な算術の真理を含んでいるので,「$1 = 1$」を含む。S の要素は T の定理なので「$1 = 1$」は T で導出できる。したがって「$1 = 1$」とその否定「$1 \neq 1$」が T で導出できることになり，T は矛盾している。逆に，T が矛盾しているとする。すると，ある論理式 φ とその否定 $\neg\varphi$ が T で導出できる。よって，& 導入と矛盾効果により「$1 \neq 1$」が T で導出できる。ゆえに T が矛盾するのは，T で「$1 \neq 1$」が導出できるとき，そしてそのときに限る。

したがって，ヒルベルトのプログラムの目的には 2 通りの特徴づけができる。算術，解析学，集合論の形式体系について，(a) どの体系でも偽な有限的文が導出されないこと，そして，(b) どの体系も無矛盾なこと，を示すことである。算術，解析学，集合論の標準的な形式体系で，(a) と (b) は同値になる。いままで

みてきたように，これらの主張を確立するには，その形式化においてどんな導出も「$1 \neq 1$」(の翻訳) を最後の論理式にもたないことを示せば十分である。ヒルベルトとその共同研究者は，T における有限的論理式のどんな導出も有限的な手続きによって有限的算術の形式的版の同じ論理式の導出に変形できるということを示すことによって，それを成し遂げることを目論んでいた。彼らはある特定の変形を頭に描いていた。そして，1927 年までに，アッケルマンとフォン・ノイマンによって，算術に対する証明の完成はもうすぐだという期待を起こさせるに十分な進展がなされたのである。

異論と返答

ポアンカレの議論に追従して，ブラウワーは数論の無矛盾性の証明に帰納法を用いることは循環論法になると反論した[9]。この議論は，自然数上の帰納法は無矛盾性のどんな証明にも必要になるが，帰納法は有限主義者の立場の見解においては依然として明白なものではない，というものである。この問題は，無制限な帰納法と量化記号のないエフェクティブに決定可能な述語に関する帰納法を区別することで解消される。無制限な帰納法は実際，その代入結果が非有界な存在量化記号をもつ述語を含むので，有限主義者にとって明白なものを超えている。しかし量化記号をもたないエフェクティブに決定可能な述語に関する帰納法は，前章で説明したことから，有限主義者にとって受け入れられるものである。そして無矛盾性の確立のために用いられるべき帰納法は，この制限された形の帰納法である。

より深刻な異論がブラウワーによって唱えられている。

> 「形式主義数学の無矛盾性の証明によってその (内容的) 正当化をすることは循環論法を包含してしまう。なぜなら，この正当化は『命題の無矛盾性から命題の正しさが得られる』という命題の (内容的) 正しさに依存しているからである。…」[10]

無矛盾な理論は偽かもしれない。ブラウワーがここで付け加えようとしていることは，ひょっとすると，有限的算術の有限的でない算術への無矛盾な拡張は偽かもしれない，したがって，その拡張の有限的な無矛盾性証明はその適切さを確立しえない，というものである。しかし，この異論は解消できる。まず，ヒルベルトの立場によれば，有限的でない文は真でも偽でもなく，リアルな命

題というよりはイデアルな命題である。もっともこのように回答しなくても，この異論は解消できる。有限的でない定理の正しさは確立させる必要はないのである。なぜなら，有限的でない形式体系には道具としての信頼性だけが要求され，その有限的帰結の正しさだけが要求されるのである。有限的算術の有限的でない拡張が信頼できるのは，それが偽の有限的な帰結をもたないとき，そしてそのときに限る。しかし，問題になっているどの形式体系の無矛盾性もその体系で「$1 \neq 1$」が導出されないことと同値で，前節で算術や解析学に対してみたように，このことはどんな偽の有限的文も導出されないことを導く。これはヒルベルトにとって切り札であった。有限的算術の拡張が無矛盾ならば，偽な有限的帰結をもたないのである。逆は矛盾効果から導かれる。関心ある体系に関する無矛盾性と有限信頼性の同値性が有限的方法で示され，したがって，これらの体系の無矛盾性から有限信頼性を導くのに循環性はない。ブラウワーのためにも公平に述べておくと，無矛盾性と信頼性の同値性は，1927 年のブラウワーによる批判の数カ月前までヒルベルトによって言及されることはなかった[11]。何年もの間，ヒルベルトは無矛盾性に重点をおいていたが，1927 年以前には関連した事例においても無矛盾性が信頼性を導くということに気がついていなかったようである。にもかかわらず，ヒルベルトはこの異論に対して完全に的を射た反撃をしたのである。

その反論がヒルベルトの立場をつぶせなかったとすると，有限的でない主張は真理値をもたないということを受け入れず，解析学や集合論における道具主義に同調しない人々はまだ困惑するかもしれない。というのも，有限的算術の拡張の無矛盾性がその**非**有限的帰結で偽なものがないことを保証すると考える根拠はないからである。これには次のように答えよう。無矛盾性の確立にはそれでもなお意義がある。なぜなら，ラッセルのパラドクスによって明らかになったフレーゲの理論の不合理の類いを排除し，道具の有用性を保障する有限的信頼性を確立するからである。解析学と集合論の無矛盾性や有限的信頼性がもし確立されたならば，それらの理論の研究の継続や使用が正当化されるだろう。

真理を保障するためのプログラムで，ヒルベルトの有限主義に対抗するものとしてはブラウワーの直観主義があった。では，ヒルベルトのプログラムは直観主義にとって代わられるべきものだったのだろうか。いや，そうではない。ヒルベルトのプログラムはブラウワーのプログラムより認識論的に安全で数学的

に損害が少ない。直観主義は，厳密に確立されていない精神的構成の抽象現象学に基づいているが，ヒルベルトのプログラムは，うまく定義された記号の有限配列に関する機械的推論に基づいている。直観主義は，その厳密な再定式化の後でさえ古典的解析学の便利で自然な論法を禁止するが，ヒルベルトはその正当性を探求している。もしうまくいけば，ヒルベルトのプログラムは直観主義者が彼らの受け入れる制限された数学に対して与える正当性よりももっと確かなものを古典数学に与えてくれる。そのようなわけで，ブラウワーの立場に共鳴していたワイルが，ヒルベルトのプログラムの成功が古典数学の有限的信頼性を確立することに気づくや否やそれを受け入れたのは驚くには値しないであろう[12]。しかし，不運なことにこのプログラムの成功は訪れなかった。

第 V 部

ゲーデルの導出不能性定理

1

不完全性，
および真理の定義不可能性

ヒルベルトのプログラムは形式体系を数学の基礎についての研究の中心に据え，1920年代後半にはヒルベルトが思い描いた方向へ急速に進んでいた。ところが1931年に出版されたゲーデル (同年弱冠25歳) の一編の論文によって基礎論の様相は一変した。この論文には形式体系に関する重大な意義をもつ2つの定理が含まれおり，メタ数学 (すなわち，形式体系に関する研究) における新しい強力な証明技法が与えられた。この章では，その2つのうちの一番目の定理および関連するタルスキによる定理について述べ，さらにそれらの広範な意義を検討する。次の章では二番目の定理を述べ，その意義を検討する。

これらの定理の意義は論争の種となる微妙な問題であり，そこに進んでいくためにはある程度の背景知識，特にシンタックスの算術化の知識の理解が必要となる。ゲーデルによってなされたこの「シンタックスの算術化」はメタ数学における主要技法であり，本書では以後これを**コード化**とよぶことにする。コード化は，これらの定理および定理に至る道筋を正確に理解するための土台を与えるものである。

コード化

ヒルベルトは，算術や解析学や集合論の形式体系が無矛盾であることを，体系のシンタックスに属する対象物とその対象物の形式的性質に，有限的算術の道具を適用することで示そうとしていた。ここで，形式体系には原始記号のリストがあり，シンタックスに属する対象物とは，それらの記号，記号が有限個並んだ記号列，そして記号列が有限個列が並んだ列などである。また形式的性質には,「項である」,「論理式である」,「体系における導出 (証明を形式的に表

現したもの) である」などがある。ゲーデルが発見したことは，形式体系のシンタックスに属する対象物やそれらの形式的性質に関する有限的な推論を，それらに直接的な言及をせずに，対象物をコード化した自然数や形式的性質を再現した算術的条件を扱うことにより管理できる，ということである。形式体系に関する議論を有限的算術で完全に記述することによってこのようなことが可能になるのである。さらに，議論の対象となる形式体系がこの議論に必要な有限的算術を包含しているならば，どんな形式体系をもってきても，その体系に関する議論をそれ自身の中で行うことができるのである。

ゲーデルはまず第一に，任意に与えられた形式体系 T に対してそのシンタックスに属する対象物を列挙して番号を付ける方法を具体的に示した (以後，議論の対象となる形式体系を T とよぶ)。こうして付けられる番号を，その対象物の**ゲーデル数**あるいは**コード**とよぶ。シンタックスに属する対象物 α に対して，そのコードを算術の形式体系内で表した数項を $\ulcorner\alpha\urcorner$ と表記する。この $\ulcorner\alpha\urcorner$ は数ではなく項であるが，これを α のコードとよんでもさしつかえない。コード化には以下の条件が保証されているとしてよい。シンタックスに属する各対象物にはそれぞれ一意にコードが対応しており，(1) 与えられた対象物からそのコードを計算することができ，(2) 与えられた数に対して，それが何かのコードになっているか否かを判定し，もしなっているならば復号してもとの対象物を求めることができる。コード化と復号は有限の手続きで実行される計算である。ここにあげた条件を満たすコード化の方法は多くあり，数理論理学のどんな教科書をみてもそれぞれ具体的な方法が載っている。

ゲーデルのアイデアの第二の部分は，例えば「これは導出である」といった形式的性質を，算術における述語で再現することである。問題とする形式的性質 F に対して，次に述べるような算術の述語 φ をみつける方法をゲーデルは示したのである。シンタックスに属する任意の対象物について，それが性質 F を満たすこととそのコードが述語 φ を成り立たせることが同値になる。これをもう少し詳しくみてみよう。S は PRA[*] を包含した算術理論とする。S の述語 $\varphi(x)$ が (体系 T に関する) 形式的性質 F を S において**再現する** (represent) ということを次の条件で定義する。S の任意の数項 $\mathbf{n}$ に対して，

(1) $\mathbf{n}$ が性質 F を満たす対象物のコードならば，$\varphi(\mathbf{n})$ が S で導出できる，

[*] 訳注：初出箇所 (p.178) を参照。

(2) $\mathbf{n}$ が性質 F を満たす対象物のコードでないならば，$\neg\varphi(\mathbf{n})$ が S で導出できる。

ただし $\neg\theta$ は θ の否定を表す。この定義は，例えば「x は T における y の導出である」といった (多変数の) 関係へも自明に拡張できる [1]。さて，体系 S は真な理論，つまり S で導出可能なものはすべて通常の算術での解釈で真になると仮定する。すると，性質 F が述語 φ で S において再現されるならば，次が成り立つ。

α が性質 F を満たすことと，$\varphi(\ulcorner\alpha\urcorner)$ が真であることは同値である。

ただし α は T のシンタックスに属する対象物で，$\varphi(\ulcorner\alpha\urcorner)$ の真偽は通常の算術での解釈である。このとき φ を真にする数は，F を満たす対象物のコードにほかならない。興味の対象となるいくつかの場合には S が T に含まれる。つまり S が T の部分理論 (に翻訳可能) になる。そのような場合には，T のシンタックスの性質を T 内部で再現できるということになる。

これらの事項が解説される際に，φ が S において性質 F を再現することが示されただけで，文 $\varphi(\ulcorner\alpha\urcorner)$ は「α が F を満たす」ということを“言い表している”あるいは“**表出している** (express)”と説明されることがある。しかしたとえ S が真な理論の場合でも，これは誤解を招きかねない説明である。φ が F を再現するという条件は,「$\cdots$ は性質 F を満たす」と「$\varphi(\ulcorner\cdots\urcorner)$」とが同じ外延をもつことを保証しているだけで，後者にコードの復号化を施せば前者と同じ意味を表すものになる，とはいっていないのである [2]。φ が性質 F を再現するということが復号化だけでは読み取れない場合があり，一般にはそのような (述語からそれが再現している形式的性質を求める) 方法は存在しない [3]。以上の理由から，真な理論において算術の述語 φ が性質 F を再現しているからといって，算術の文 $\varphi(\ulcorner\alpha\urcorner)$ が「α が性質 F を満たす」を“言い表している”あるいは“表出している”と考えてはいけないのである。再現ではなく表出のためには，数項を復号化するだけで意図している性質 F が何であるかを，F の定義に照らして明確に読み取れる必要がある。このようなことは，F の定義に対応して“並行的”に φ が構成された場合には可能である。この並行的構成については例で説明するのが最善である。例えば，T は以下の記号をもつとしよう。

- 個体定数記号 $\mathbf{0}$ (零を表す)

- 無限個の個体変数記号 $\mathbf{v}_i$ (ただし $i = 1, 2, 3, \ldots$)[4]
- 1 変数関数記号 $\mathbf{s}$ (後者関数を表す)
- 2 変数関数記号 $+$ (足し算を表す)
- 2 変数関数記号 $\times$ (掛け算を表す)

そして「項である」という形式的性質は，次で再帰的に定義されるとする。

α が項であるための必要十分条件は，α が $\mathbf{0}$ であるか，ある i に対して α が $\mathbf{v}_i$ であるか，またはある項 $\mathbf{r}$，$\mathbf{t}$ に対して α が $\mathbf{sr}$ か $+\mathbf{rt}$ か $\times\mathbf{rt}$ となっていることである。

いま，これらの記号列のコードが次のように定義されているとする ($\mathbf{r}$,$\mathbf{t}$ を項とする)。

$$\ulcorner \mathbf{0} \urcorner = 1,$$
$$\ulcorner \mathbf{v}_i \urcorner = 3^i,$$
$$\ulcorner \mathbf{sr} \urcorner = 2 \times 3^{\ulcorner \mathbf{r} \urcorner},$$
$$\ulcorner +\mathbf{rt} \urcorner = 4 \times 3^{\ulcorner \mathbf{r} \urcorner} \times 5^{\ulcorner \mathbf{t} \urcorner},$$
$$\ulcorner \times\mathbf{rt} \urcorner = 8 \times 3^{\ulcorner \mathbf{r} \urcorner} \times 5^{\ulcorner \mathbf{t} \urcorner}.$$

すると，前述の項の定義と並行して,「x は項のコードである」という算術の述語 $\tau(x)$ を次のようにつくることができる。

$\tau(x)$ が成り立つための必要十分条件は，$x = 1$ であるか，ある $u < x$ に対して $x = 3^u$ であるか，またはある $u < x$ とある $v < t$ に対して $\tau(u)$，$\tau(v)$ が成り立ち，$x = 2 \times 3^u$ または $x = 4 \times 3^u \times 5^v$ または $x = 8 \times 3^u \times 5^v$ となることである。

この記述は，算術を (直接にあるいは言語の変換を通して間接的に) 含むさまざまな形式体系の言語に転写することができる。項の定義および項のコードの定義をふまえて τ の定義を眺めれば，τ を成り立たせる数は項のコードにほかならないということが，単に復号化によっていえる[5]。すなわちこの場合は，算術の文 $\tau(\ulcorner \alpha \urcorner)$ は「α は項である」を表出している，とみなすのが妥当である。

一般に，形式的性質 F を理論 S において再現する述語 $\varphi(x)$ について，F の定義に対応して並行的に φ が構成されたとき，かつそのときに限り $\varphi(\ulcorner \alpha \urcorner)$ は「α は性質 F を満たす」という命題を“表出”している，と考える。これは，例えば「α は T における β の導出である」といった (多変数の) 関係へも拡張で

きる。以後 $\mathrm{Pr_T}(x,y)$ を,「α は T における β の導出である」という関係を S において再現する 2 変数述語で，この関係の再帰的定義と並行して構成されたものとして用いる。したがって T のシンタックスに属する対象物 α, β に対して，文 $\mathrm{Pr_T}(\ulcorner\alpha\urcorner, \ulcorner\beta\urcorner)$ は「α は T における β の導出である」という命題をコードによって表出している。

形式体系 T のシンタックスに属する対象物をコード化すること，それらの対象物がもつ形式的性質の再帰的定義に並行して算術の述語を構成すること，そして，もとの性質や関係をその述語が再現していることを示すこと，これらすべてのことは，ゲーデルの導出不能性定理の証明に含まれる重要な部分である。ゲーデルは，S が算術のある有限的な部分を含んでいればこれらが可能であることを示した。その有限的な部分とは，原始再帰的算術 (PRA とよぶ) という名前で知られているもので，厳密に計算可能な算術と考えられているものである[6]。

自己言及，および真理の定義不可能性に関するタルスキの定理

ゲーデルは上で説明したシンタックスの算術化を使って，自己言及的な表現を定式化する方法を編み出した。S は PRA を包含する算術理論，T は S を包含する形式体系とし，$\varphi(x)$ は T の論理式でちょうど 1 つの自由変数をもつもの，つまり 1 変数述語とする。すると T のシンタックスに属するどんな対象物 α についても，文 $\varphi(\ulcorner\alpha\urcorner)$ を考えることができる。ここで次の事実を S 内部で示すことができる。φ が T のどんな 1 変数述語であっても，それに対して T の文 β が存在して，β と文 $\varphi(\ulcorner\beta\urcorner)$ との同値性

$$\beta \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\beta\urcorner)$$

が S で導出される。これが**対角化補題**として知られている事実である。この証明のあら筋と対角化という名前については，本章の補遺を参照されたい。この補題の重要なところは，もしも φ が文に関するある形式的性質 F を再現していて F の定義と並行的に構成されたものならば，ある文 β は「β は性質 F を満たす」を表出している，という点である。

この種の自己言及は，第 III 部の第 3 章に現れたうそつきパラドクス (「私はうそをついている」という発話や,「この文章は真ではない」など) に含まれ

るものである。すると対角化補題がうそつきパラドクスと同じ自己矛盾を導くことを心配しなくてもよいのだろうか？　心配無用である。そうなるためには「真ではない」という性質の算術化が仮定されるのである。このことに着目してタルスキは,「真である」という算術の文の性質は算術で定義することができない，と論じた。この議論はとても簡単なのでここで紹介しよう。$\mathcal{L}$ は算術の形式言語とし，F は $\mathcal{L}$ の文に関する性質とする。算術の 1 変数述語 φ が存在して，$\varphi(\mathbf{n})$ が真であることと n が性質 F を成り立たせる $\mathcal{L}$ の文のコードであることが任意の数 n に対して同値になる場合，性質 F は**算術で定義可能である**という[7]。さて議論は背理法による。すなわち「算術の真な文である」という性質が算術で定義可能であると仮定する。仮定から算術の述語 $\mathrm{Tr}(x)$ があって，$\mathcal{L}$ のどんな文 χ に対しても，χ が真であることと $\mathrm{Tr}(\ulcorner\chi\urcorner)$ が真であることとが同値になる。これを

(i) $\chi \leftrightarrow \mathrm{Tr}(\ulcorner\chi\urcorner)$

と書く。

ここで $\mathrm{Tr}(x)$ の否定を考える。これははじめの仮定により「算術の真な文ではない」ということを定義する $\mathcal{L}$ の述語である。すると対角化補題によって,「β は真ではない」ということを表した文 β が存在する，すなわち

(ii) $\beta \leftrightarrow \neg\mathrm{Tr}(\ulcorner\beta\urcorner)$

となる文 β が存在する。ところで，(i) は $\mathcal{L}$ の任意の文について成り立つので β に対しても成り立つ。したがって

(iii) $\beta \leftrightarrow \mathrm{Tr}(\ulcorner\beta\urcorner)$

となる。そして，等しいものに同値なものはまた互いに同値なので，(ii),(iii) から

$$\neg\mathrm{Tr}(\ulcorner\beta\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Tr}(\ulcorner\beta\urcorner)$$

を得る。これは矛盾であり，したがって「算術の真な文である」という性質は算術で定義不可能である。

以上がタルスキの**真理の定義不可能性定理**である。これは，数学の真理を，算術の真理に限ったとしても十全に把握することは不可能である，ということを示

したいくつかの発見の中の一つである。「人間の知的構築物から独立した抽象的な数学的存在の世界」という考えは空虚な形而上学であると広く感じられていた当時 (1930 年代初め) において，これは重大な発見であった。そんな世界などもち出さずに解釈ができるときにのみ数学の真理という概念は容認される，と信じられていたのである。タルスキの定理の意義のさらに正確な理解のためには，先行するゲーデルの第一導出不能性定理 (First Underivability Theorem)[8] と関連させてこれをみる必要がある。

不完全性

ゲーデルの導出不能性定理の証明にも自己言及が含まれる。T は PRA を包含する形式体系とする。ゲーデルは，T の言語で「… は T における … の導出である」という関係を表出した論理式 $\mathrm{Pr_T}(x,y)$ をつくり，そして「T で γ 自身を導くことはできない」ということを記述した T の言語による文 γ をつくった。これを詳しくみてみよう。$\mathrm{Pr_T}(x,y)$ は「… は T における … の導出である」という関係を PRA において表出し，したがって T においても表出しており，$\neg\mathrm{Pr_T}(x,y)$ は「… は T における … の導出ではない」を表出している。すると，x を全称束縛することにより,「どんな x についても，x はコードが y の論理式の T における導出のコードではない」を表出する述語 $\forall x\neg\mathrm{Pr_T}(x,y)$ を得る。シンタックスに属する対象物でコードが n であるものを $\langle n\rangle$ と表記することにすると，この述語は「どんな x についても，$\langle x\rangle$ は $\langle y\rangle$ の T における導出ではない」を意味している。つまり $\forall x\neg\mathrm{Pr_T}(x,y)$ は，T での導出不能性を表出している。すると対角化補題により,「γ は T で導出不可能である」を表出する文との同等性が T で示される文 γ を，T の算術言語を使ってつくることができる。すなわち，

$$\gamma \leftrightarrow \forall x\neg\mathrm{Pr_T}(x,\ulcorner\gamma\urcorner)$$

が T で導出される。この条件を満たす文 γ のことを，T の**ゲーデル文**とよぶ。この同等性により次もいえる。γ が真であるための必要十分条件は，γ が T で導出不可能なことである*)。さらに,「γ が T で導出できる」と仮定すると，T が

*) 訳注：$\gamma \leftrightarrow \forall x\neg\mathrm{Pr_T}(x,\ulcorner\gamma\urcorner)$ が真であるならば，これがいえる。T が真な理論でない場合，「この同等性が T で導出可能」という条件だけからはいえない。

矛盾することが次のように示される。仮定からある $\mathbf{n}$ に対して $\mathrm{Pr_T}(\mathbf{n}, \ulcorner\gamma\urcorner)$ は真であり，T が PRA を包含するので，これは T で導出できる。一方，γ(仮定) および上記の同等性がともに T で導出できることから，$\forall x \neg \mathrm{Pr_T}(x, \ulcorner\gamma\urcorner)$，したがって $\neg \mathrm{Pr_T}(\mathbf{n}, \ulcorner\gamma\urcorner)$ が T で導出できる[9]。すなわち，$\mathrm{Pr_T}(\mathbf{n}, \ulcorner\gamma\urcorner)$ とその否定がともに T で導出されるので，T は矛盾する。以上でゲーデルの第一導出不能性定理の前半部分，すなわち次の主張が導かれた。

T は PRA を包含する形式体系とする。
(i) もしも T が無矛盾ならば，ゲーデル文 γ は T で導出できない。

後半部分の証明は少し複雑なので単に文面を述べるだけにする。ここでは T に，無矛盾より少し強い“**ω 無矛盾**”とよばれる条件を付けている[10]。後半の主張は次のものである。

(ii) もしも T が ω 無矛盾ならば，ゲーデル文の否定 $\neg\gamma$ は T で導出できない。

形式体系 T が**不完全である**ということの定義は，「α は T の言語による文で，α もその否定も T で導出不可能である」という α が存在することである[11]。すると，上の 2 つの主張の意味するところは次のように述べることができる。

PRA を包含し ω 無矛盾などんな形式体系も不完全である。

ゲーデルによる証明の数年後にロッサーは次のことを示した。自分自身の導出不能性を表出したゲーデル文の代わりにもう少し複雑なことを表出した文 δ を使えば，ω 無矛盾という条件を単なる無矛盾に弱めることができる。すなわち，T が無矛盾ならば δ もその否定も T で導出不可能である[12]。したがって，「ゲーデル–ロッサーの定理」とよばれることもあるこの定理は，次のようにまとめることができる。

PRA を包含し無矛盾などんな形式体系も不完全である。

これが第一導出不能性定理である。

真理の定義不可能性を経由した不完全性

真理の定義不可能性と不完全性には密接な結びつきがあり，そのことはゲーデル自身が1934年の講義で明確にしている[13]。TはPRAを包含する数論の形式体系とし，$\mathcal{L}$(T)はTの言語とする。いま，Tは算術的に**健全である**とする，すなわち次を仮定する。Tで導出可能なすべての文は，算術の文として標準的に解釈されたときに真である[*)]。さて，もしも「$\mathcal{L}$(T)の真な文である」という性質がTにおいて再現可能であるならば，算術においてうそつきパラドクスが実現できてしまうので，これは再現不可能である。一方,「Tで導出可能な$\mathcal{L}$(T)の文である」という性質は，PRAを包含しているTによって再現可能である。これらのことから，$\mathcal{L}$(T)の真な文のコード全体のクラスと，Tで導出可能な$\mathcal{L}$(T)の文のコード全体のクラスとは，一致しないことがいえる。すなわち,「真であるけれどもTで導出不可能な$\mathcal{L}$(T)の文」もしくは「Tで導出可能だけれども真でない$\mathcal{L}$(T)の文」が必ず存在する。しかしこの後者はありえない。なぜなら，Tは健全でありTで導出可能な文はすべて真だからである。したがって，真であるけれどもTで導出不可能な$\mathcal{L}$(T)の文αが必ず存在する。するとαが真であることからその否定$\neg\alpha$は偽であり，Tの健全性から$\neg\alpha$はTで導出できない。以上，αと$\neg\alpha$がともに導出できず，Tは不完全である。このようにうそつきパラドクスを考えることにより，PRAを包含する健全などんな算術の形式体系も不完全であることが明らかになる。これは第一導出不能性定理よりも弱い定理である。なぜなら導出不能性定理は，PRAを包含するすべての“健全な”算術体系の不完全性ではなく，PRAを包含するすべての“無矛盾な”算術体系の不完全性を述べており，無矛盾性は健全性よりも弱い要求だからである[14]。

はじめゲーデルはうそつきパラドクスの考察によるこの弱い不完全性定理に到達して，数論の不完全性をこの方法で発見した[15]。その後の(健全ではなく)無矛盾な体系の不完全性を示す試みの要点は，単に無矛盾性が健全性よりも軽

---

*) 訳注:「(算術的な)健全性」は，セマンティックな概念である。これを近似する“半”形式的表現が，前ページおよび注10で定義されているω無矛盾性である。健全性はω無矛盾性より強く，ω無矛盾性は無矛盾性より強い概念である。注11に“不完全性”という言葉の2つの使用法が指摘されているが，“健全性”についても，本文で使われる用法とは別の用法もあるので注意されたい。

い条件だから，というだけではなかった。無矛盾性はシンタックスに関する概念であり，万人に受け入れられていたが，健全性は有限的でない文に対応する「真」という概念を伴っており，有限主義者や当時の有力な哲学者から疑わしいものとみなされていたからである。

ゲーデルの第一導出不能性定理の意義

第一導出不能性定理にはどんな意義があるのだろうか。人間の知性の本質に関した意義についてはこれまでに膨大な主張がされてきたが，その主題は本書の扱いを超える[16]。それでは，数学の哲学に関する意義は何だろうか。私見では，この定理は，数学の哲学の中心的な問題である数学的真理と数学的存在の本質に関わっている。この章の残りの部分では，その主張を具体的にした後に，ヒルベルトのプログラムへのこの定理の関わりを論ずる。

真理と導出可能性

この定理のひとつの帰結は次のようなものである。数学のどんなに包括的な形式体系もすべてを包括することは不可能である。数学の原理すべてを形式的に網羅するという目標は達成不可能なのである。しかしゲーデルが指摘しているように，このことは彼が不完全性を発見した以前から知られていた。それは，T を解析学の (または解析学を包含する) 形式体系とすると，T の言語で定義可能なすべての実数を数えあげることができ，すると対角化[17]によって,「T で定義可能な実数全体」に入らないある実数が定義できるからである。この定義は T の言語ではできないはずであり，こうして定義されたその実数に関する真な言明は T で導けないのである。ゲーデルの第一導出不能性定理がこれに付け加えたのは次のことである。T の言語で記述可能な真理に限ったとしても，T が矛盾していなければそのすべてを T で導くことは不可能であり，さらにこのことは PRA を包含するすべての形式体系について成り立つ。つまり，そのような体系の言語で記述できる真理とその体系の導出可能性は同一視できないのである。ゲーデルの発見以前は，算術 (解析学や集合論も同様に) の適切な形式化は，その言語で記述できる真理の概念を捉えることが可能な方法であると考えられていた。ゲーデルはそれが違うということを示したのである。

タルスキの定理はこれをさらに拡張したものである。「T で導出可能である」という性質は，量化詞がそれほど入り組まない簡単な算術の述語で表現することができる。しかし「算術の真な文である」という性質はどんなに複雑にしても算術の述語では表現できない，ということをタルスキは示したのである。純粋に形式的な性質はどんなものでも算術の述語を複雑に構成すれば表現できるだろうから，算術の言語による真理を形式的性質に還元することはできないのである。観念的なものは避けるという哲学に算術の真理概念を引き込もうとする望みは，ゲーデルとタルスキの定理により厳しい打撃を受けたのである (「算術の真理概念」を「数学の真理概念」に代えられることはいうまでもない)。

存在と無矛盾性

ヒルベルトが有限主義の主要な言説を公表する四半世紀前，一見それと相容れない次のような考えを彼は支持していた。公理系の無矛盾性が，その公理と結論をすべて成り立たせるようなものの領域の存在を保証する。1900 年にパリで開かれた国際数学者会議での有名な演説に，この考えの現れをみることができる。実数算術の公理系を取り上げ，ヒルベルトは次のように言っている。

> 「これらの公理の無矛盾性の証明は同時に，実数の集合，すなわち連続体の数学的存在に関する証明になっている。これらの公理の無矛盾性証明が完全に成し遂げられれば，実数の総体の存在に対して時折投げかけられる疑いは，まったく根拠のないものになるだろう。」[18]

ゲーデルの第一導出不能性定理と，無矛盾性が存在を導くというこの考えとの関連性をみるためには，形式言語と論理に関するいくらかの予備的な注意が必要である。

形式体系の言語はシンタックスをもつ。これは，原始記号の規定および原始記号や複合記号のさまざまな種類 (変数，項，論理式など) の規定のことである。言語はまたセマンティクスをもつ。これにはまず，解釈を構成するための要素 (対象領域とその領域上の関係や演算や特定の要素) の規定がある。例としては次のものがある。領域として自然数全体，演算として後者関数，足し算，掛け算，そして特定の要素 0. さらにセマンティクスに含まれるものは，これらを言語の記号へ割り当てる方法である。例えば，自然数全体を変域として各変数

記号 $\mathbf{v_n}$ への割り当てを決め，記号 $\mathbf{s}$，$+$，$\times$ にはそれぞれ後者関数，足し算，掛け算を割り当て，記号 $\mathbf{0}$ には数 0 を割り当てる。するとこのセマンティクスにより，各項の表示する値が再帰的に定義され，最終的にはこの解釈における各文の真偽が再帰的に定義される[19]。

1 階の言語と 2 階の言語にはセマンティクスに関して重大な相違がある。1 階の言語には，対象領域の要素を値としてもつ変数があるが，その他の種類の変数はない。そのような変数を 1 階変数とよぶ。他方 2 階の言語には，1 階変数に加えて対象領域の“部分集合”を値としてもつ変数があり，そのような変数を 2 階変数とよぶ。ヒルベルトとアッケルマンは 1 階言語のある演繹体系を考案した。そして，文 α が文の集合 Γ からその体系で導出できるならば α は Γ の意味論的帰結である，という健全性を示した[20]。以前と同様に，文の集合 Γ が無矛盾であるための必要十分条件を，Γ から矛盾する 2 つの文 α，$\neg\alpha$ が同時に導出できることがないこととする。すなわち，無矛盾性は演繹体系に依存する概念である。ある特定の 1 階言語と演繹体系に関して，ゲーデルは次のことを示した。文のどのような無矛盾集合 Γ に対しても，Γ のすべての要素を同時に真にする解釈が存在する[21]。あるいは現在のいい方では次のようになる。Γ が無矛盾ならば Γ はモデルをもつ[22]。これに対するゲーデルの証明は，通常のどんな 1 階言語と演繹体系に関する結果にも焼き直すことができる。つまりまとめると，無矛盾などんな 1 階の理論もモデルをもつ。したがってこれは，公理系の無矛盾性がそのモデルの存在を保証するという考えの部分的な証明になっている[23]。ただしあくまでも部分的である，なぜなら 1 階の公理系しか扱っていないからである。

この結果は 2 階の公理系に拡張できるだろうか。デデキント–ペアノ算術の 2 階言語の形式体系の無矛盾性が与えられれば，答えは No である。このことは，デデキントの定理のもとで第一導出不能性定理を用いて明らかにされる。その説明の前に，デデキント–ペアノ算術 (DPA とよぶ) の 1 階の体系と 2 階の体系との違いを説明しよう[24]。その違いは帰納法の原理を与える方法にある。1 階の体系では，帰納法の原理は公理図式

$$[\varphi(\mathbf{0})\ \&\ \forall\mathbf{v}_0(\varphi(\mathbf{v}_0) \rightarrow \varphi(\mathbf{s}\mathbf{v}_0))] \rightarrow \forall\mathbf{v}_0\varphi(\mathbf{v}_0)$$

にあてはまるもの全体という形で，無限個の公理で構成されている。この φ は，

1 階の算術言語による任意の述語がここにあてはまるという印である。他方 2 階の DPA では，帰納法の原理は 2 階の単一の公理

$$\forall \mathrm{R}\Big([\mathrm{R}(\mathbf{0})\ \&\ \forall \mathbf{v}_0(\mathrm{R}(\mathbf{v}_0) \to \mathrm{R}(\mathbf{s}\mathbf{v}_0))] \to \forall \mathbf{v}_0 \mathrm{R}(\mathbf{v}_0)\Big)$$

で捉えられる。この R は 2 階変数であり，自然数の任意の集合を値とする解釈が意図されている [25]。この文は,「自然数の任意の集合について，その集合が 0 を含み，各要素に対してその次の数がまた要素になっているならば，すべての自然数がその集合の要素になる」といっている。なお，この「集合」には，1 階の言語で記述される条件で定義される集合もそうでない集合もあてはまる。さらに 2 階の DPA には，集合存在公理が次の公理図式

$\exists \mathrm{S}[\forall \mathbf{v}_0(\mathrm{S}(\mathbf{v}_0) \leftrightarrow \varphi(\mathbf{v}_0))]$ (すなわち，S の要素であることと φ が成り立つことが同値になるような集合 S が存在する)

で含まれる*)。ただし，φ は 2 階の言語で記述される任意の述語を表し，S は自然数の任意の集合を値としてもつことを意図した 2 階変数である。2 階の言語が 1 階の言語を包含することを用いると，1 階の帰納法の公理を使って導出できるどのような文も 2 階の帰納法の公理と集合存在公理を組み合わせて導出できることがわかる。しかしその逆は成り立たない。

体系の無矛盾性がそのモデルの存在を導くか，という問題に戻ろう。デデキントは，“2 階の” DPA のすべてのモデルは同型である，ということを証明した [26, **)]。さらに次のような事実背景がある。モデル M で文 α が真であるならば，M と同型な任意のモデルで α は真であり $\neg\alpha$ は偽である。ここで 2 階の DPA の標準モデルを $\mathfrak{N}$ と書くことにすると，これらから次が導かれる。

α が $\mathfrak{N}$ で真であるならば，$\neg\alpha$ は 2 階の DPA のどんなモデルにおいても偽である。

これを「デデキントの事実」とよぶ。さて，T を 2 階の DPA とする。T には確かに PRA が組み込まれているので，ゲーデルの第一導出不能性定理の前半を適用して次が得られる。T が無矛盾ならば T のゲーデル文 γ は T で導出できない。ところで，T にはモデルがあるとしているので無矛盾であり [27]，これから

*) 訳注：原文には論理式表記はないが，帰納法の公理にあわせるために追加した。

**) 訳注：ここでの「2 階の DPA のモデル」は，その 2 階領域が 1 階領域のベキ集合に一致するものだけを指す。

次の2つの結論が導かれる。(i) $T+\neg\gamma$ (Tにゲーデル文の否定を公理として加えた理論) は無矛盾である[28]。(ii) γ は $\mathfrak{N}$ で真である (なぜなら，ゲーデル文 γ が標準モデルで真であることと，γ がTで導出できないことは同値なので)。デデキントの事実を (ii) に適用すると，$\neg\gamma$ はTのどんなモデルでも偽になることがいえる。したがって次が得られる。(iii) $T+\neg\gamma$ にはモデルが存在しない。(i) と (iii) を合わせると，$T+\neg\gamma$ が，どんな無矛盾な理論にもモデルがあるという主張に対する反例になってることがわかる[29]。

すなわちここでは，無矛盾性から存在は保証されないのである。それでもなお1階の理論では無矛盾性が存在を導くので，この例外は瑣末なものだと考える人があるかもしれない。しかしそれは正しくないだろう。自然数や実数や集合というものに対する我々の信念をもっともよく捉える理論は2階であり[30]，いくつかの2階理論は非常に重要なのである。数学の議論は抽象的存在の世界に完全に依存するものであり，その依存は，対応する形式理論の無矛盾性によって正当化できるようなものではない。ましてや，自然数などのある種の数学的実在への明白な依存を，形式理論の単なる無矛盾性への依存と再解釈することは不可能である。モデルの存在を語ることを形式的無矛盾性を語ることにうつし変えて，抽象的思考の重荷を降ろすことは不可能なのである。

有限的な真理と導出可能性

有限主義からみれば，1階または2階のDPAのような理論の真偽やモデルの存在を問題にすることは，有限的な内容をもたない。したがって，真理 (これは有限的でないと考えられる) が導出可能性と一致しないという事実や，無矛盾性が実在領域の存在を保証しないという事実は，ヒルベルト流の有限主義者を悩ませることはない。しかし，有限主義者は第一導出不能性定理に別の意味で動揺するだろう。なぜなら彼らは，有限的真理は有限的な方法で証明できる真理に等しく，算術の有限的な証明は形式体系における導出によって正確に捉えられると信じているだろうからである。もしもそれらが正しいのならば，算術の有限的な真理を，形式体系における導出可能性というかなり具体的なものに固定化する方法が存在するはずである。しかし，算術の有限的な真理は形式体系における導出可能性とは一致しないということを，ゲーデルの第一導出不

能性定理の証明が示しているのである。S を有限的算術の形式体系とする。これは無矛盾で PRA を包含するものであろう[31]。そこで，S の言語のコード化が与えられたとして，S のゲーデル文 (これを γ とする) は S で導出できない。しかし γ は，有限的全称文 $\neg\mathrm{Pr}_{\mathrm{S}}(x, \ulcorner\gamma\urcorner)$ (これは γ が S で導出不可能であることを表出している真な文である) と同値であることが，S において導出可能である。すなわち，有限的算術の適切な形式体系で導出できない有限的な真理がある。有限主義者たちは驚いているだろう。有限的算術において真理と証明可能性が一致していないか，有限的証明可能性が形式体系の導出可能性によって把握できていないか，どちらかなのである。いずれにしても算術の有限的な真理は，導出可能性というシンタックスの特徴で問題なく捉えるというわけにはいかないのである[32]。

ヒルベルトのプログラムは
第一導出不能性定理によって中絶するのか

ヒルベルトのプログラムの目標は達成不可能であるということが，第一導出不能性定理によって示された，とこれまで強く主張されてきた[33]。その目標とは数論，解析学，集合論の有限的な信頼性を示すことであった。そしてこれは，形式的な数論の体系がその有限的な部分の保存的拡大になっていることを示して，次いで解析学と集合論の体系についても同じことを示して，達成されるはずであった。ここで形式理論 T がその部分理論 S の**保存的拡大**であるとは，S の言語による論理式で T で導出できるものはすべて S で導出できる，ということである。すなわち，1 階の DPA で導出できる有限的な論理式はすべて DPA の有限的部分だけから導出できている，ということが示されるべきであった。ヒルベルトのプログラムの問題点として主張されているのは,「数論の形式理論がその有限的部分の保存的拡大である」ということを否定する根拠をゲーデルの結果が与えている，というものである。S は有限的算術の形式体系，T は S を拡大した数論とする。そしてコード化の方法が与えられたとして γ を S のゲーデル文とする。すると，S は無矛盾で PRA を包含しているとして，第一導出不能性定理の前半部分により，γ は S で導出できない有限的全称文となる。しかし γ は T では導出できるかもしれず，もしそうならば T は S の保存的拡大で

はない[34]。T が解析学や集合論の体系ならば T で γ が導出できるだろう。したがって，少なくとも解析学や集合論に関しては，ヒルベルトのプログラムは第一導出不能性定理によって審判を下されたようにみえる。

デトレフセンはこの議論に説得力のある反論をしている[35]。それを説明するためにいくつかの定義をする。有限的な文 α が S で**反駁可能**であるとは，$\neg\alpha$ が S で導出可能であることとする。また α が有限的全称文 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ である場合は，その否定のある適当な代入結果 $\neg\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ が S で導出可能であることとする。ヒルベルトのプログラムの目標は，偽である有限的な文を導出しないような算術，解析学，集合論の適当な形式体系の存在を示すことである。いま，有限的なある文 α が偽であるとする。α が全称文でない場合はこれが偽であることは有限的な計算で示すことができ，その計算を S における $\neg\alpha$ の導出に変換することができる。α が全称文 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ である場合は偽な代入結果 $\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ があり，これは全称的でない有限的な文なので，S でこの否定 $\neg\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ が導出できる。すなわち，算術の有限的な文で偽であるものはすべて S で反駁可能なのである。ところで，S は有限的算術を正しく形式化した体系だという約束なので，S で反駁可能な有限的な文はすべて偽である。これらを合わせて，有限的算術では偽であることと S で反駁可能であることが一致することがいえる。そこで，S を包含する算術 (または解析学や集合論) の適当な形式体系を T として，ヒルベルトのプログラムは次のように換言できる。算術の有限的な任意の文[36] α に関して，

α が T で導出可能ならば α は S で反駁不可能である。

これが T の有限的信頼性なのである。デトレフセンは，これが次の意味での T の S に対する保存的拡大性とは異なることを指摘している。算術の有限的な任意の文 α に関して，

α が T で導出可能ならば α は S で導出可能である。

「T の S に対する保存的拡大性を否定することで T の有限的信頼性が否定される」という議論が成り立つのは，「S で反駁不可能な有限的な文はすべて S で導出可能である」がわかっていればの話である。しかし，そうならないことが第一導出不能性定理によって示される。なぜなら，S は ω 無矛盾なので[37]，S のゲーデル文 (の冒頭の全称量化詞を取り去ったもの) は S の言語による有限的全

称文で，S で導出も反駁も不可能な例になっているからである。T の S に対する保存的拡大性が示されないということだけから，有限的な主張に関する T の信頼性を示すことは不可能，という結論は導かれないのである。

ヒルベルトらが目標達成に向けて用いた戦略は，T における有限的な文の任意の導出を S における導出に変換する方法をみつけることであり，すなわち，T の S に対する保存的拡大性を証明することであった。したがって，この戦略は失敗であると結論できる。しかしこれだけでは，他の方法によってヒルベルトのプログラムの目標を達成する可能性についての結論は出ていない。この可能性については，ゲーデルの第二導出不能性定理とその意義に関する次章で議論する。

補遺：対角化補題

S は PRA を包含する算術の真な理論，T は S を包含する形式体系とする。T の 1 変数述語全体はコードの小さい順に $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ とエフェクティブに数え上げることができる。すると，k 行 j 列に $\varphi_k(\ulcorner\varphi_j\urcorner)$ のコードが書かれた表によって $\varphi_k(\ulcorner\varphi_j\urcorner)$ という形の論理式のコード全体を考えることができる。この表の対角線，すなわち $\varphi_k(\ulcorner\varphi_k\urcorner)$ という形の文のコードに着目して，$\mathbf{d}(\ulcorner\varphi_k\urcorner) = \ulcorner\varphi_k(\ulcorner\varphi_k\urcorner)\urcorner$ となるような原始再帰的関数 $\mathbf{d}$ を定義することができる。これは対角関数とよばれる。詳細を記述するために，コードが n である式を $\langle n\rangle$ と表記することにする。すなわち，$\langle n\rangle$ が φ であるための必要十分条件は，n が $\ulcorner\varphi\urcorner$ であることとする。そこで，**対角関数 d** を次で定義する。

$$\mathbf{d}(n) = \begin{cases} \ulcorner\langle n\rangle(n)\urcorner, & n \text{ が 1 変数述語のコードであるとき} \\ n, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

この対角関数によって，ある種の自己言及が広範に実現できる。その議論は次のようになる。$\mathbf{d}$ は S の (したがって T の) 言語で書き表すことができる。これは $\mathbf{d}$ が原始再帰的であることから可能である。さて，$\varphi(y)$ を T の言語の任意の 1 変述語とする。そして，$\varphi(y)$ 中の自由変数 y のすべての出現を $\mathbf{d}(x)$ に置き換えて得られる $\varphi(\mathbf{d}(x))$ を考える。いま，わかりやすくするために $\mathbf{m} = \ulcorner\varphi(\mathbf{d}(x))\urcorner$ とし，文 $\varphi(\mathbf{d}(\mathbf{m}))$ を α で表すことにする。すると次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}(\mathbf{m}) &= \ulcorner\langle\mathbf{m}\rangle(\mathbf{m})\urcorner && (\mathbf{d}\text{ の定義による})\\
&= \ulcorner\varphi(\mathbf{d}(x))(\mathbf{m})\urcorner && (\mathbf{m}\text{ の定義による})\\
&= \ulcorner\varphi(\mathbf{d}(\mathbf{m}))\urcorner = \ulcorner\alpha\urcorner && (\alpha\text{ の定義による})
\end{aligned}
$$

したがって $\varphi(\mathbf{d}(\mathbf{m}))$ と $\varphi(\ulcorner\alpha\urcorner)$ は S において同等である。すなわち α の定義から,

　α と $\varphi(\ulcorner\alpha\urcorner)$ は同等

になる。これが対角化補題である。この意味は次のとおりである。T の 1 変数述語 $\varphi(y)$ が任意に与えられると,「α が (標準的な算術の解釈において) 真である」と「$\varphi(y)$ で再現されている述語を α が満たすこと」とが同値になるような, T の文 α をつくることができる。

2
「無矛盾性」の導出不能性

ゲーデルの第二導出不能性定理はヒルベルトのプログラムへ直接脅威を与えている，と広く考えられている。この定理は「無矛盾性の導出不能性」ともよばれ，算術のほんの一部を包含した理論の無矛盾性の証明には，その理論の能力を超えた前提が必要であることを示したものと解釈される。ゲーデルの第二導出不能性定理のこのような意味解釈については，詳細に立ち入らなければ評価することが不可能である，そしてそれには，前章で述べたシンタックスのコード化，算術化に関する事柄を押さえておく必要がある。この章では第二導出不能性定理の証明の概略を述べてから，争点のヒルベルトのプログラムに対する意義を論ずる。

第二導出不能性定理への道筋

T は原始再帰的算術 (PRA) を包含した形式体系で，T の言語のコード化が決まっているとして，定理への道筋を述べる。$\mathrm{Pr_T}(x,y)$ は T の言語による 2 変数述語であり,「x は T における y の導出である」というシンタックスについての関係を T において再現し，しかも，この関係の再帰的な定義に並行して構成されたものとする。その構成方法から，コードの復号を用いるだけで，$\mathrm{Pr_T}(x,y)$ がこの関係を再現しているということを読み取ることができる。すなわち，この述語はコード上で[1] 「x は T における y の導出である」という関係を "表出" しているということができる。シンタックスに属する対象物 α に対して，そのコードを表した T の数項を $\ulcorner\alpha\urcorner$ と書く。すると，T のシンタックスに属する対象物 α，β に対して，文 $\mathrm{Pr_T}(\ulcorner\alpha\urcorner,\ulcorner\beta\urcorner)$ は「α は β の T 導出である」を表出している (T における導出のことを T 導出とよぶ)。

以前と同様に，$\mathrm{Pr_T}(x,y)$ からつくられた T のゲーデル文を γ とする。すな

わち，γ はそれ自身の T での導出不能性を表出した文と同値である。T が無矛盾であるとは「ある文とその否定の両方が T で導出できることはない」であり，「どんな ζ, η, θ についても，η が ζ の T 導出であり θ が $\neg\zeta$ の T 導出である，ということはない」ともいえる。したがって「T は無矛盾である」という命題は，T の言語によって次のように表出できる。

$$\forall x \forall y \forall z \neg(\ \mathrm{Pr_T}(y, x)\ \&\ \mathrm{Pr_T}(z, \mathrm{neg}(x))\ )$$

ただし $\mathrm{neg}(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\neg\varphi\urcorner$ である[2]。一般に扱われているどんな体系についても，無矛盾性は，数項による偽な等式 (例えば $\mathbf{0} = \mathbf{s0}$) の導出不能性，あるいは数項による真な等式の否定 (例えば $\neg\mathbf{0} = \mathbf{0}$) の導出不能性と，明らかに同等である[3]。すなわち，この類の矛盾の導出不可能性と体系の無矛盾性とが同一視できる。例えば，T の無矛盾性は T の言語で次のようにも表出できる。

$$\forall y \neg[\mathrm{Pr_T}(y, \ulcorner\neg\mathbf{0} = \mathbf{0}\urcorner)]$$

このように，T の無矛盾性の表出には明らかに互いに同等であるいくつもの文を使うことができる。その中でどれでもよいから選んだ文を「$\mathrm{Con_T}$」と名づける。さて，これで第二導出不能性定理の証明の概略を示すことができる。

第一導出不能性定理の前半部分は以下のようであった。

(a) T が無矛盾ならば，γ は T で導出できない。

この (a) は T の言語で次のように表出することができる。

(b) $\mathrm{Con_T} \to \forall x \neg \mathrm{Pr_T}(x, \ulcorner\gamma\urcorner)$.

第一導出不能性定理の前半部分 (a) は有限的な推論で証明されていたので，(a) の算術化である (b) が有限的算術で証明できることが期待される。すなわち，(a) の証明を形式化することによって，PRA における (b) の導出 (T は PRA を包含しているのでこれは T における導出でもある) が得られる，ということが期待されるだろう。これは可能であるが，しかし事態は単純ではない。このためには，論理式 $\mathrm{Pr_T}(x, y)$ に関して可導性条件 (derivability conditions) とよばれるいくつかの条件が成り立つことを示さなければならない[4]。これを示すためには，関係「x は y の T 導出である」がもつある種の標準的な性質を用い，さらに論理式 $\mathrm{Pr_T}(x, y)$ が単にこの関係を再現しているだけではなく，その再帰的な定義に並行して構成されている，ということを用いる[5]。さて，$\mathrm{Pr_T}(x, y)$

が可導性条件を満たしていることから，(b) が T で導出可能であることが示される。ところで，γ がゲーデル文であることから，同値性

$$\gamma \leftrightarrow \forall x \neg \mathrm{Pr_T}(x, \ulcorner\gamma\urcorner)$$

が T で導出でき，(b) も導出できることから

(c) $\mathrm{Con_T} \to \gamma$

が T で導出できることがいえる。この事実と以下のような簡単な議論によって，ゲーデルの第二導出不能性定理を得ることができる。$\mathrm{Con_T}$ が T で導出できると仮定しよう。$\mathrm{Con_T}$ と (c) のそれぞれの T 導出と文 γ を連結したものは，T が規則モーダス・ポーネンス[6] をもつことから γ の T 導出である。すなわち，次のように推論できる。

$\mathrm{Con_T}$	(導出できたと仮定する)
$\mathrm{Con_T} \to \gamma$	(先ほど得られた)
γ	(上の 2 つとモーダス・ポーネンスから)

したがって，もしも $\mathrm{Con_T}$ が T で導出可能であるとすると γ も導出可能になってしまう。しかし第一導出不能性定理の前半部分により，γ は T で導出不可能なことがわかっている。したがって，$\mathrm{Con_T}$ は T で導出不可能である。

これが第二導出不能性定理のゲーデル–ベルナイスによる証明の基礎になるアイデアである[7]。普通この定理は特定の形式体系に対して証明され，一般の体系に対してはその証明から読み取りなさい，ということになっている。フィファーマンは，標準的な形式体系というものに関する一般的な記述を正確に与え，この議論が算術や解析学や集合論の標準的な形式体系に対しては成り立つことを示した[8]。非標準的なある形式化ではうまくいかないことがあるので，結局この定理は次のように述べることができる。

> T が PRA を包含した無矛盾な標準的形式体系であるならば,「T は無矛盾である」ということを T の言語で表出したある文は T で導出できない。

この定理の特色は，数学では珍しく,「記号が指しているもの」についてだけではなく「記号化自体の意味や意図」に関わっている点である。$\mathrm{Con_T}$ が T の無矛盾性を“表出”しているという条件が，それを特徴づけている。これは哲学業界のために特別に付加したようなものではない。もしも無矛盾性を表す文の

候補が T の無矛盾性を表出していないならば，つまりその文が「x は y の T 導出である」を再現はしているけれども表出はしていない述語によってつくられているならば，これは可導性条件に反する余地があるので，その文に対して第二導出不能性定理の議論がうまくいくことは保証されない[9]。たとえその文の導出不能性を示すことができたとしても，その文が T の無矛盾性を表出はしていないことから，この導出不能性の意義が何であるかは難しくなる。対照的に，T の無矛盾性を“表出”している文の T での導出不能性は，ヒルベルトのプログラムへの明白な脅威を与えており重大な意味をもつ。

第二定理がヒルベルトのプログラムにもたらしたもの

ヒルベルトのプログラムへの脅威は以下の議論に要約される。T は PRA を包含した算術や解析学や集合論の標準的な形式体系とする。背理法を用いるために,「T の無矛盾性の有限的な証明」があると仮定する。したがって T は無矛盾である。すると，T の言語で T の無矛盾性を表出した文 $\mathrm{Con_T}$ が T で導出できないことが，第二導出不能性定理によりいえる。この文 $\mathrm{Con_T}$ を実際にどうつくるかは定理の証明が示している。ここで，T の無矛盾性を有限的全称文で標準的に表した次の主張を $\mathbf{C}$ とする。

η が ζ の T 導出であり θ が ζ の否定の T 導出である，ということはない。

ただし ζ, η, θ は T の言語のシンタックスに属する対象物を指す変数である。また，$\mathrm{Con_T}$ をコード復号して得られる主張を $\mathbf{C}'$ とする。これは例えば「$\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$ を導く T 導出はない」，つまり有限的全称文としては

η は $\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$ の T 導出ではない,

(η はシンタックスに属する対象物を示す変数) である。すると，T のシンタックスに関する有限的な推論によって $\mathbf{C}$ から $\mathbf{C}'$ を導くことができる。したがって，もしも T の無矛盾性，すなわち $\mathbf{C}$ が有限的な方法で証明できたならば，それを $\mathbf{C}'$ (すなわちコード化によって文 $\mathrm{Con_T}$ になる主張) の有限的な証明へ拡張できる。そしてその証明をコード化して翻訳すれば，有限的算術における $\mathrm{Con_T}$ の証明が得られる。T は PRA 以上のものを包含しているので，この証明は T における $\mathrm{Con_T}$ の導出に形式化できる。しかしこれこそが第二導出不能性定理に

よって否定されたことである。したがって，T の無矛盾性の有限的な証明があるという仮定が偽なのである。

議論を完結させるためには，上の結論をヒルベルトのプログラムに結びつけなければならない。プログラムの目標は,「算術の適当な形式体系 T において，有限的な偽の文は導出されないこと」を有限的な方法で示し，さらに T を解析学や集合論の体系にして同様なことを示すことであった。ところで，T がそのような適当な体系であるならば，そこでは次の“矛盾効果”が成り立つ。すなわち，ある文とその否定がともに T で導出可能ならば，T の言語による任意の文が T で導出可能になる。つまり，もしも T が矛盾するならば，算術の標準的な解釈において有限的な偽を表現した $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})$ や他のどんな文も，T で導出できることになる。したがって，有限的な偽の文が T で導出不可能であることが T の無矛盾性を導く。ある体系において，偽である有限的な文がまったく導出できないとき，その体系は**信頼できる**ということにする。T の信頼性から T の無矛盾性を導くというこの議論は有限的な推論でできるので，信頼性の有限的な証明は無矛盾性の有限的な証明へ拡張できる。しかし，T の無矛盾性の有限的証明は存在しない，という結論がすでに得られている。したがって T の信頼性の有限的な証明は存在しない。さらに，ヒルベルトのプログラムに関わるすべての形式体系にこの議論を適用し，プログラムの目標は達成不可能になる。以上の議論が，細部には変化がありうるが，第二導出不能性定理のヒルベルトのプログラムに対する意味のオーソドックスな見方を支えるものである。

この議論は完璧ではない。つまらないあら探しはしないにしても 2 つの弱点がある。一つは,「第二導出不能性定理は，考察の対象になっている数学を適切に形式化したどんな体系にも適用される」という暗黙の前提部分にある。先ほど書いた第二導出不能性定理の文面では，標準的形式体系にその適用が限られていた。しかし，もしかしたらある“非”標準的な形式体系がデデキント–ペアノ算術 (DPA) を適切に形式化しているかもしれない。そのような体系に対しては，コード化による無矛盾性の表現が導出されないとはいえないし，有限的算術を形式化した部分においてさえ，そこでの導出可能性を否定できない。したがって，算術に対するヒルベルトのプログラムは達成できるかもしれず，解析学や集合論に対しても同様の可能性が生じるだろう。これを非標準的形式体系の問題とよぼう。

二つめの問題は，PRA を包含した形式体系はその体系に関する有限的などんな議論をもコード化によって捉えることができる，という前提についてである。PRA を包含した体系 T について,「T で形式化できる範囲は超えていてかつ有限的な方法」が存在するかもしれない。もしそうなら，その方法による T の無矛盾性証明をコード化によって T 内の導出に翻訳することはできないだろう。すると，T の無矛盾性を表出した文の T での導出不可能性はヒルベルトのプログラムの障害にならなくなる。これが有限的推論の問題である。これら 2 つの問題を順に扱っていこう。

非標準的形式体系の問題

算術の非標準的な形式化によって，ヒルベルトのプログラムは第二導出不能性定理を回避することができるのではないか。これが，オーソドックスな見方に逆らってヒルベルトのプログラムを擁護したデトレフセンの論旨である [10]。実際，その体系を提示する様式自身によって無矛盾性が保証されてしまうような，算術の非標準的な形式体系が存在する [11]。さらに算術の標準的などんな形式体系に対しても，それが無矛盾であるならば，それと同じ定理集合をもち，上述の無矛盾性保証が付いている体系が存在する。それでは，無矛盾性保証付き体系はどのようにして第二導出不能性定理を回避するのだろうか。その答えは，無矛盾性保証付き体系における「導出可能」という関係がもつ非標準的な性質にある。第二導出不能性定理の証明においては，すでに述べた可導性条件がすべて満たされることが導出関係に要請されていたのだが [12]，無矛盾性保証付き体系ではそのうちのどれかが成り立たないのである [13]。したがってそのような非標準的な体系に関しては，第二導出不能性定理の証明は働かない。

無矛盾性保証付き体系は，第二導出不能性定理によって引き起こされたヒルベルトのプログラムに対する障害を回避する手段を提供しているようにもみえるのだが，その望みは錯覚であると考える根拠が 3 つある。第一は，無矛盾性保証付き体系は算術を適切に形式化したものであるのか，という疑問。第二は，与えられた無矛盾性保証付き体系が意図した定理集合を形式化しているということを知るには，もとの標準的な形式体系の無矛盾性を知っていなければならないという点。そして第三は，非標準的な体系に対しても適用可能な第二導出

不能性定理の変種があるのではないか，という疑問。これらの点を順に立証していこう。

フィファーマン体系とロッサー体系という二種類の無矛盾性保証付き体系がある。それぞれには多くの変種があり，そして両種類の体系とも DPA の標準的形式体系 T に依存し，それから派生して存在する。T に対する**フィファーマン体系** T^F では，T の公理を (例えばそのコードの小さい順に) 数え上げるエフェクティブな方法 e が使われる。T^F の言語と推論規則は T と同じである。T^F の公理は,「T の公理であって,『e の順序でそれより小さい T の公理全体の集合』と無矛盾なもの」と定義される[14]。T^F の導出とは,「T の導出であって，そこに現れる公理の中で e の順序で最大なものが T^F の公理になっているもの」と定義される[15]。もしも T が無矛盾ならば，T^F の公理集合と導出集合は T のそれらとまったく同じである。しかし T と違って，T^F の無矛盾性は明らかである*)。ここでロッサー体系にうつるまえに，フィファーマン体系が，少なくともヒルベルトのプログラムの目的では算術の適切な形式化とはみなせない理由を説明しよう。たとえ「この体系ではどんな導出も偽の有限的文は導かない」ということが有限的に証明できたとしても，導出の候補が実際に導出であるか否かのエフェクティブな判定が不可能ならば,「その体系が形式化しようとした数学」の確かさを得ようという努力は無駄である。これが，第 IV 部の第 4 章で与えた形式体系の定義において，導出がエフェクティブに決定可能であることが要請されていた理由である。フィファーマン体系はこの条件に反するのである。与えられた文集合が無矛盾であるか否かを判定するエフェクティブな方法は存在せず[16]，つまり，文が T^F の公理であるか否か判定するエフェクティブな方法は存在せず，したがって，文の列が T^F の導出であるか否か判定するエフェクティブな方法も存在しないのである[17]。

T を上と同様に DPA の標準的な形式化とする。T に対する**ロッサー体系** T^R には，T の公理の数え上げではなく導出を数え上げるエフェクティブな方法 e が使われる。(与えられた n に対して「e による n 番目の導出は何か」，あるいは与えられた導出に対して「それが e による何番目の導出であるか」がエフェ

*) 訳注：もしも T^F において矛盾の導出が存在するならば，その導出に現れるすべての公理を e の番号順に $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ とすると，T^F の導出の定義から φ_n は T^F の公理でなければならないが，すると T^F の公理の定義によって「$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ からの矛盾の導出」が存在することは不可能である。

クティブに決定可能であると仮定する。)　T^R の言語，公理，推論規則はすべてTと同じである。しかし，T^R の導出は,「Tの導出であって，その結論がその導出よりもeの順序で小さい任意のT導出の結論に相反しないもの」と定義される。ただし2つの論理式が相反するとは，一方が他方の否定になっていることである[18]。もしもTが無矛盾ならばTと T^R は公理も規則も導出も同じものになり，したがって定理集合も同一になるのだが，無矛盾性が明らかなのは後者だけである。フィファーマン体系とは異なり，導出の候補 (Tの導出 η) が実際に T^R の導出になっているか否かが，次のようにエフェクティブに判定できる。η が数え上げeに関して何番目かをみて，その番号より小さなすべての導出を調べて η の結論に相反する結論をもつものがあるかをみる。そして，そのようなものがないことが，η が T^R の導出であるための必要十分条件になる。T^R が正当な形式体系であることを否定する理由はない。しかし算術の形式化としての適切性には正当な疑いがある。「算術の形式化」には定理集合だけでなく定理導出のプロセスまでが含まれると考えられるが，T^R における論理は算術における論理とかけ離れてしまっているので，その意味で本当の形式化ではないのである。ロッサー体系の大きな欠点はカット規則が成り立たないことである。カット規則とは,「公理ではないけれども導出ずみのもの」を公理と同様に前提として用いることによって導出できる結論も定理として認める，という原理である[19]。これは数学における推論の普遍的な特徴であり，これを用いないと現実的に証明できるものは大幅に減ってしまうだろう。したがって，カット規則が成り立たないような体系は，普通の算術，解析学，集合論などの適切な形式化とはいえないのである[20]。

フィファーマン，ロッサーの類の無矛盾性保証付き体系は，標準的体系に依存しそれらから派生して存在する。ゲーデルの第二導出不能性定理を避ける手段としてこれらを用いることの第二の問題点は，派生した無矛盾性保証付き体系が算術の十分な範囲を含んでいるかどうかが有限的な方法ではわからない点である。これらが十分であるという信念は，依存される体系T (これはDPAの自明な形式化として設計されたものである) が無矛盾である，という仮定に基づいている。もしもTが無矛盾ならば，派生体系 $T^\star$ の定理集合はTのそれに等しく，したがって，$T^\star$ は意図している数学命題をすべて集めた形式化になっている。しかし，この議論をTの言語で表現できたとしても，この結論を有限

的な推論で得ることはできない。なぜなら「T と T* が同じ定理集合をもつ」ことの有限的な証明がもしあったならば，T* の無矛盾性の有限的な証明と合わせることによって，T が無矛盾であることの有限的な証明が得られてしまうからである。この証明は T の無矛盾性を表出した文 $\mathrm{Con}_{\mathrm{T}}$ の T における導出に翻訳できるはずであるが，それは第二導出不能性定理によって否定されているのである。したがって，T が十分な有限的算術を含んでいるならば，T と T* が同じ定理集合をもつことを有限的な方法で示すのは不可能なのである。有限的に示すことが可能なのは「T* の定理集合は T の定理集合の無矛盾な部分集合」ということである。しかし，有限的に示すことはできるのだが，その部分集合は小さすぎるかもしれない。つまり，依存される体系に関する妥当な前提があると,「派生体系の定理集合が数学の十分な範囲を含む」ということをヒルベルトのプログラムで受け入れられる手段で示すことはできないのである。T* が形式化する理論は DPA であると想定するならば，有限の手段は，T* が形式化する定理集合は十分に広いということを示すのには不十分になる。したがって，派生体系 T* の無矛盾性という有限的に得られる知識によって，T* が形式化することが想定されている数学の無矛盾性を有限的な知識として得ることは，できないのである。

これらの議論は結論を決定づけるものではない。DPA は PRA を包含しているが,「有限的な方法はすべて DPA の適当な形式体系で表現できる」という上記で用いた仮定を否定する者もあるかもしれない。この疑問については次節で議論する。さらに，いままで誰も思い付かなかった非標準的な形式化で，これらの難点を回避するものが存在するかもしれない。しかし，有限的な推論は DPA に包含されるということをとりあえず認めれば，現在までに案出された非標準的体系はヒルベルトのプログラムを救済する目的には役にたたないということが，ここで与えた考察によって明らかになった[21]。

ヒルベルトのプログラムを非標準的体系によって救済するという企てに対する第三の異議は，プログラムの核心にふれるものである。無矛盾性証明はヒルベルトのプログラムの唯一の目標でも最終目標でもなかった。算術や解析学や集合論の信頼性こそが，それら無限的な数学の使用を正当化するために示すべきことである。ここで理論の信頼性とは，その理論が有限的な偽を導出することの不可能性である。プログラムでは，明白に信頼できる方法，すなわち有限

的な推論だけによって数学の信頼性を示すことが要請されている。ヒルベルト学派が研究していた体系に関しては，信頼性と無矛盾性は同値になる。しかし，非標準的なある体系ではそれらが同値にならない。そこで，“無矛盾性”を“信頼性”に置き換えた第二導出不能性定理が，PRA を包含するすべての体系に対して証明できるのかが，ヒルベルトのプログラムの実行可能性についての重大な問題点になる。正確には次のようになる。「PRA を包含し信頼性をもつ任意の (非標準的なものを含む) 形式体系において，その体系の信頼性を表出した文は導出不可能である」は証明できるか。もしこの答えが肯定的ならば，PRA がすべての有限的算術を包含するという前提のうえで，ヒルベルトのプログラムの主要な目標は達成不可能になる。

実際，答えは肯定的である。1966 年にゲーデルは,『同一体系における無矛盾性の証明不可能性についての最良かつもっとも一般的な形』と後に題した文章で，この状況を要約している。彼は,「相反する文の組の導出不可能性」を無矛盾性とするならば，PRA を包含する無矛盾なある体系 T において，T 内部での無矛盾性証明がありうることを認めている。そして彼は“外部無矛盾性”とよぶ信頼性の一種を定式化して，もしも T が外部無矛盾ならば，その外部無矛盾性は T においては証明できない，と述べている。最後に彼は,“正当化”をヒルベルトのプログラムでの意味にとるならば，T の外部無矛盾性の証明は，T の無限的な公理を正当化するためには必要なものであることを指摘している[22]。

外部無矛盾性は,「任意の有限的な文 α に関して，α が偽ならば α は T で導出できない」という信頼性を正確に述べたものである[23]。「y が T で導出可能である」を表出した $\exists x \mathrm{Pr_T}(x,y)$ のことを $\mathrm{Prov_T}(y)$ と書くことにすると，T が信頼性をもつための必要十分条件は，T の言語による任意の有限的な文 α に対して $\mathrm{Prov_T}(\ulcorner\alpha\urcorner) \to \alpha$ が成り立つことである[24]。第二導出不能性定理のゲーデル–ベルナイスによる証明を技術的に変更することにより，次を示すことができる[25]。T が PRA を包含し信頼性をもつならば，T の言語による有限的な文 α で，$\mathrm{Prov_T}(\ulcorner\alpha\urcorner) \to \alpha$ が T で導出不可能なものが存在する。通常の第二導出不能性定理の証明とは違って，T が標準的な形式体系であるという条件は，この証明では不要である。すなわち，この結論は第二導出不能性定理を強めたものになっており，以下のようにまとめられる。

> T が PRA を包含し信頼性をもつならば，T の信頼性を主張する文の具体例で，T では導出不可能なものがある。

有限的な推論は DPA に包含されるとするならば，この主張は次のようにヒルベルトのプログラムの目標に直接ふれることになる。T を DPA のある形式化とする。すると，T は PRA および有限的算術 (これは PRA と同一なのかもしれないが) を包含する。そこで，DPA の信頼性の有限的な証明がもしも存在したならば，その証明を T で形式化すればどんな有限的な文 α に対しても $\mathrm{Prov_T}(\ulcorner\alpha\urcorner) \to \alpha$ の T 導出が得られる。しかし，まさにこれは上記の強化版第二導出不能性定理で否定されたことである。すなわち，ただ一つの前提「数に関する有限的な推論は算術 (および解析学や集合論) の形式体系で捉えることができる」に基づいて，ヒルベルトのプログラムの主目標の達成不可能性がゲーデルの第二導出不能性定理の強化版により示されたのである。

有限的推論の問題

しかし，上記の前提は成り立たないのかもしれない。導出不能性定理の最初の論文でゲーデルは，ヒルベルトのプログラムへの可能な打開策としてこのことを次のように述べている。

> 「定理 XI (や M および A についての対応する結果) はヒルベルトの形式主義的な見地を否定するものではない，ということを注意しておきたい。なぜなら，その見地では，有限的な手段による無矛盾性証明の存在だけが必要とされるのであって，P (または M や A) では形式的に表現できないような有限的な証明の存在も考えられるのである。」[26]

定理 XI とは『プリンキピア・マテマティカ』の体系に関する第二導出不能性定理であり，M と A はそれぞれ集合論と解析学の形式体系である。ゲーデルはすぐに，この最初の注意にもかかわらず，有限的なすべての証明は実際にはこれらの体系の中で表現でき，算術の無矛盾性の有限的な証明は不可能である，と信じるに至った[27]。そしてこの考えは，ヒルベルトにもっとも近かったベルナイスも共有していた。以下の引用はゲーデルのかなり後期の論文からである。

> 「根拠が具体的か抽象的かに対して正確な定義がないので，有限的数学の不十分性については，(数論の無矛盾性証明のための不十分性だけでさえ) 今日その厳密な証

明は存在しない。しかし，数論の無矛盾性証明にゲンツェンが用いた ε_0 までの帰納法を分析することにより，この驚くべき事実がかなり明らかになってきた。」[28]

これを少しみてみよう。順序数 ω は最初の無限順序数である。順序数 ε_0 は ω よりずいぶん上の方にある。これは，ω から始まり，ω と直前の要素のベキをとるという操作を列挙した

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots$$

という無限列の極限である。自然数は ω 未満の順序数と同一視できることから，前章で述べた帰納法の原理は ω までの帰納法の一種である。一方，ε_0 までの帰納法は ω までの帰納法を拡張したものである。これは順序数の任意の性質 P に対する次の推論規則で表現できる。

> ε_0 より小さい任意の順序数 α について，α より小さいすべての順序数が P を満たすならば α 自身も P を満たす

という前提から，

> ε_0 より小さい任意の順序数は P を満たす

という結論を導く。P を量化詞なしで定式化できる述語に限ると，これはゲンツェンによって研究された類の帰納法になる。ゲンツェンは ε_0 までの帰納法と純粋に有限的な手法だけを組み合わせて，算術のある標準的形式体系の無矛盾性を証明した[29]。さらに，ゲンツェンの無矛盾性証明に引き続いて次のことが証明された。ε_0 より小さい任意の順序数 α について，α までの帰納法は数論で証明できる[30]。これらのことと第二導出不能性定理により，ε_0 までの帰納法は，それと有限的な算術の原理だけを組み合わせて算術の無矛盾性が証明できるようなもっとも弱い帰納法原理である，ということをゲンツェンは導いた。

> 「しかし，この［順序数と導出との］相関関係はすでにほぼ最適であると考えてよい。すなわち，より本質的に小さい順序数ではこれは得られないと考えることは妥当である。特に，我々の導出全体は，ε_0 より小さい数を上界とする順序数たちでは扱うことはできない。なぜなら，そのような数までの超限帰納法はそれ自身我々の形式体系で証明できるが，するとその帰納法によって遂行される無矛盾性証明がゲーデルの定理に反するからである (もちろん，証明中の他の道具で我々の数論の形式体系で表現できないものはない，という前提のうえで ...)。」[31]

これはもちろん標準的形式体系にだけ適用されるものである。算術は解析学に包含され，集合論にも (言語の変換を経て) 包含されるので，解析学や集合論の対応する無矛盾性の証明には，少なくとも ε_0，実際にはもっと上の順序数までの帰納法が必要である。

そこで，ε_0 までの帰納法はヒルベルトが要求した有限的原理として根拠のある確かさをもつか，という問題を考える。ε_0 までの帰納法は無限順序数上を動く変数によって記述されるので，明らかにこの原理は字面上有限的ではない。しかし，そのことは決め手にならないことをゲーデルが示唆している。なぜなら，ω^2 までの帰納法は同じ理由で字面上有限的ではないが，それには経験的な基盤があるからである。

> 「一方，例えば ω^2 の場合は可能なのだが，(ε_0 までの帰納法の) 正当性は直接明らかというわけにはいかない。すなわち，下降列の構造のさまざまな可能性を一目では把握できず，したがって，そのような任意の列の停止性についての直接具体的な知識は存在しない。さらに，(ヒルベルトの意味での) 具体的な知識もまた，順序数の増加ステップをたどるという方法では実現不可能である。なぜなら $\alpha \to \alpha^2$ といった具体的な根拠のあるステップは小さすぎて，ε_0 に到達するには ε_0 回繰り返さなければならないからである。」[32]

ω^2 と ε_0 とのゲーデルによる対比は以下のように説明できる。ω^2 までの順序数は，2 次元の無限行列の各要素とみなすことができる。無限行列の各行には正整数の番号がついており $n+1$ 番の行は n 番の行の下にあり，そして各行には左から順に正整数で番号づけされた無限の要素がある。順序数間の自然な大小関係は「上の行にあるものが下のものより小さい」「同一行内では左にあるものが右のものより小さい」となる。ω^2 までの順序数全体をこのようにイメージすれば，次のことは容易に認められる。これらの順序数の任意の下降列に関して，その下降列の要素が出現する行のうち行番号が最小のもの (もっとも上にある行) が必ず存在し，さらに下降列の要素でその行に現れる中でもっとも左にあるものが必ず存在する。これは下降列の最小要素であろう。すなわち，ω^2 より小さい順序数の任意の下降列は最小要素をもつのである。ω^2 までの帰納法はこの事実から簡単に導かれ，したがって，それは視覚的あるいは視覚化可能な経験を基盤としてもつことになる。しかしこのような視覚的にイメージできる空間的な表現を伴った経験が ω^ω に対してできるか，というのは疑問であり，

さらにε_0に対しては問題外である。したがって，ε_0までの帰納法は有限的な原理としての根拠ある地位はもたないのである[33]。

算術の無矛盾性のまったく異なる種類の証明で“有限的”なものは存在しうるだろうか。有限的な手法というものの合意された定義がないので，これをはっきりと否定することは不可能である。しかし，そのような無矛盾性証明の候補はみたことがない。もし実際にそのような証明があるならば，そこで用いられる有限的な手法には自然数の算術で証明不可能なものがあるはずだ，というのがゲーデルの第二導出不能性定理が示すことである。さらに，解析学の無矛盾性の有限的証明があればそこで用いられるある有限的手法は解析学をこえ，同様なことが集合論についてもいえる。ゲンツェンは，算術でどれだけのことが証明“可能”かを明らかにした。以上の発見とテイトによる有限的推論の分析[34]とを合わせると，算術をこえている有限的手法という考えの妥当性は一気に低下する。ましてや解析学をこえている有限的手法の存在はさらに信用できず，集合論についてはいうまでもない。これらの証拠は，そのような数学の有限的無矛盾性証明の存在に対して不利に働いており，それが本気にありえることとして考え続けることはほとんど無謀である。

ゲンツェンの定理は，算術の標準的形式体系に対して成り立つ。非標準的な体系の中には無矛盾性が明白なものがあるが，それらの体系では無矛盾性が信頼性を導くわけではなく，信頼性がヒルベルトのプログラムでの問題点である[35]。したがって，ゲンツェンの証明に対応する結果が非標準的形式体系の信頼性についても存在するのか，という疑問が湧く。その答えはわからない。しかし，次のことを心にとどめておくべきである。非標準的な体系は標準的体系に依存しそこから派生したものであり，非標準的体系の適切性はもとの標準的体系と同じ定理集合をもつという事実だけに基づいている。そしてその事実は，標準的体系の無矛盾性の有限的証明が得られなければ，有限的に示すことはできないものである。しかし上述のようにこれはほとんどありうることではない。したがって算術のどんな形式体系に対しても，それが標準的か非標準的のいずれの場合でも，その適切性と信頼性を有限的手法で示すことは不可能である，というのが結論である。

肯定的な 2 つの結果

結びの前に 2 つの肯定的な結果についてふれ，なぜそれらが算術に対するヒルベルトのプログラムの達成とはみなされないかを述べたい。一番目はゲーデルによる別の発見であり，それは古典算術と直観主義算術との関係についてである。ここで“古典算術”とは，標準的な 1 階論理を用いた 1 階の DPA または同等の 1 階の算術の公理系のことである。**直観主義算術**とは，数学を「思考者が直にふれられる思考上の構成に関する理論」として再構築する企てから得られたものである。ブラウワーの弟子であり後継者であるハイティングは直観主義算術の形式体系を与え，それがどのように解釈されるかを説明した [36]。ゲーデルは，次のような論理式の翻訳が存在することを示した。それは古典算術の標準的形式体系の各定理を直観主義算術のハイティングの形式体系の定理へ翻訳するものであり，前者の体系内で矛盾する論理式の組は後者の体系内でも矛盾する論理式の組へ翻訳される。したがって，もしも古典算術が矛盾を含むならば直観主義算術もそうなる [37]。直観主義算術は有限的な真理の範囲に含まれる，と考えられるならば，これは古典算術の無矛盾性の有限的な証明になるだろう。しかし直観主義算術を有限的とみなすことはできない。その主な理由は直観主義算術の対象の抽象性にある。直観主義における $A \to B$ という形の文の解釈は,「A のどんな証明に適用しても B の証明を生み出す手続き」をもっている，である (もちろんこの手続きや証明は，直観主義的に認められるものに限る)。また，直観主義における $\neg A$ の解釈は $A \to \bot$ である。ただし $\bot$ は，明らかに不合理で否定を含まない「$0 = 1$」のようなものである。以上のように，直観主義算術のこのような形をした定理はすべて証明について述べている。ここで証明とは，本質的に意味を伴った存在であり純粋なシンタックスの対象物ではないが，他方，有限主義的な推論の対象は明確に認知可能なものの空間的形状に限定される [38]。「直観主義における証明」ではなく「直観主義算術のある形式体系の導出」を用いて $A \to B$ という形の文の解釈をするならば，この対象は有限的になる。しかしそうすると直観主義算術のいくつかの公理が「→」の解釈で真でなくなってしまう。したがって，直観主義算術の定理はすべて有限的に真である，とする理由は存在しない。さらに，直観主義算術は有限的推論の構成的な要請に背いていると考える理由がある [39]。それは，直観主義におけ

る証明の概念は構成的に定義されておらず，次のように循環論法の隠れ蓑にすらなりうるということである。何が直観主義における含意命題 (A → B という形の命題) の証明であるかは，直観主義における含意命題の解釈に依存するが，先ほど述べたように，その解釈は直観主義における証明全体という概念を伴うのである。この問題については，後の直観主義的型理論[40]の発展によって克服されたのかもしれない。しかし，証明は形式的導出とは違って有限的対象物ではないという事実は，依然として残っている。したがって，(古典) 算術の直観主義算術に対する相対的無矛盾性の証明は，算術の無矛盾性の有限的証明とはみなせないのである。

ゲーデルは直観主義算術が無矛盾ならば古典算術も無矛盾であるということを示して，さらに後に，ある構成的な理論が無矛盾ならば直観主義算術も無矛盾であるということを同様な方法で示した。これら2つの結果を合わせれば，古典算術はその構成的理論 (以後これを D とよぶことにする) に対して相対的に無矛盾である，という証明になる[41]。これが述べたかった第二番目の肯定的な結果である。おおまかにいって，D は有限的算術の構成的手法は維持しているが，その対象は明らかに非有限的である。有限的算術の対象領域は数の集合であり，それは適当な体系の数項の集合として表せる。数項とは，大きさと形によって定まる基本的な対象物の直接認知可能な形状であるので，これは有限的である。ところが D は数項だけではなく，いくらでも高いレベルの計算可能関数をもその対象とする。一番低いレベルの関数は，数の有限列を入力として受け取って数を出力する。その次のレベルの関数は，入力として数だけでなく一番低いレベルの関数を受け取り，さらに次のレベルの関数は前のレベルまでの関数を同様に入力として受け取り，以後同様にレベルが上がっていく。これらのすべての関数は計算可能であること，そしてその計算可能性が構成的に明白であることが要請されている。しかし，最低レベルの関数でさえヒルベルトの有限的対象の基準に反する。なぜなら，自然数上の関数は無限の定義域をもつものであり，関数間の同一性は定義域の各要素に対する出力の同一性で定まるからである。関数を，その値を計算するプログラムと同一視したとしても，関数は認知可能な対象物の空間的形状とはならない。なぜなら，計算プログラムはそれを記述した記号の形状ではなく，その形状を適当な言語で解釈したものだからである。したがって，最低レベルの計算可能関数でもこれを有限的対象とみなす

には抽象的すぎるし，関数を数と同様に入力として受け取る高レベルの計算可能関数の抽象性の度合は，さらに高くなる。つまり，明らかにゲーデルの構成的理論Dは有限的ではないし，有限的理論として与えられたものでもなかった。古典算術のDに対する相対的無矛盾性の証明は認識論的には進歩であるが[42]，これは数論の無矛盾性の有限的な証明ではない。ましてや，このゲーデルの方法を拡張して得られる解析学の相対的無矛盾性証明は，有限的ではない。

結　論

ヒルベルト学派は有限的数学の範囲について正確な定義をもっていなかった。したがって，算術に対するヒルベルトのプログラムの目標が達成不可能であること，すなわち，信頼性の有限的証明が不可能であることについては，その数学的な証明は存在しえない。ゲーデルの第二導出不能性定理からはじまる議論は，算術の標準的な形式体系に対して，それが有限的推論を包含するという前提の上で説得力をもつ。したがって，算術に対するヒルベルトのプログラム達成への残された道は，非標準的形式体系，DPAを超える有限的手法，の2つであるが，それらの道は先ほどのさらなる議論によって事実上閉ざされた。そこで次のように結論を下したい。算術に対するヒルベルトのプログラムの目標達成は，真にはありえない[43]。解析学や集合論に対するプログラムの目標達成の望みは，なおさらない。算術の信頼性を疑う人はまず，いないだろう。本当に問題とされる対象は，そのほとんど初期の頃からパラドクスに悩まされていた解析学や集合論である。これらに関しては，ヒルベルトのプログラムによって確かさを求めることは成功不可能であることが，ゲーデルの定理とその後の発見について熟考することにより明らかになった。

補遺：第二導出不能性定理の内包性

ゲーデル文γや無矛盾性を表す文$\mathrm{Con}_{\mathrm{T}}$は，T導出であるという関係を表す述語$\mathrm{Pr}_{\mathrm{T}}(x,y)$を使ってつくられており，さらにそれは，Tの公理であるという性質を表す述語$\mathrm{A}_{\mathrm{T}}(x)$を使ってつくられている。第一導出不能性定理の証明のためには，これらが意図する関係や性質を“再現する”という条件だけで十

分である。それによって，これらの述語に関するある種の外延的妥当性が次のように保証される。数 n に対してその数項を $\mathbf{n}$ と書き，コードが n であるシンタックスの対象物を $\langle n \rangle$ と書くことにすると，

$\mathrm{A_T}(\mathbf{n})$ が T で導出できる $\Leftrightarrow$ $\langle n \rangle$ が T の公理である，
$\mathrm{Pr_T}(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ が T で導出できる $\Leftrightarrow$ $\langle n \rangle$ が $\langle m \rangle$ の T 導出である。

これによって，T が算術の真な形式体系ならば，$\mathrm{A_T}(x)$ は通常の解釈で「x は T の公理のコードである」と同じ外延をもつことになる。したがって $\mathrm{A_T}(x)$ は外延的に妥当である。同様のことは $\mathrm{Pr_T}(x, y)$ についてもいえる。一方，第二導出不能性定理の証明のためには，これらの述語は内包的にも妥当でなければならない。すなわち，これらがシンタックスに関する述語を“表出する”こと，つまり，シンタックスに関するどんな述語を表現しているかをコードの復号によって読み取れること，が必要である。

T はデデキント–ペアノ算術の無矛盾な形式体系とし，$\mathrm{A_T}(x)$ は T の公理を規定する定義に対応して並行的に構成された述語，したがって，外延的にも内包的にも妥当なものとする。同様に，$\mathrm{Pr_T}(x, y)$ は外延的にも内包的にも妥当なものとし，$\mathrm{Con_T}$ はこれらによってつくられたものとする。ここで $\mathrm{A_T}(x)$ と外延は等しいが内包的には異なる述語 $\mathrm{A^{\star}}_\mathrm{T}(x)$ を次のようにつくることができる。$\mathrm{A_T}(x)$ は「x は T の公理のコードである」を表出しているが，$\mathrm{A^{\star}}_\mathrm{T}(x)$ は大ざっぱにいって「x は T の公理のコードであり，かつ x 以下のどんな値 y についても,『T の公理で y 以下の値をコードとするものすべての集合』は無矛盾である」を表出している。T は無矛盾なので $\mathrm{A^{\star}}_\mathrm{T}(x)$ と $\mathrm{A_T}(x)$ の外延は依然等しい。この例はフィファーマンによるもので，彼はこれを，第二導出不能性定理に内包的妥当性が関わることを示すために使った。フィファーマンは，$\mathrm{A_T}(x)$ の代わりに $\mathrm{A^{\star}}_\mathrm{T}(x)$ を使って T の導出関係を再現する述語 $\mathrm{Pr^{\star}}_\mathrm{T}(x, y)$ をつくり，さらにこれを使って“T の無矛盾性文”$\mathrm{Con^{\star}}_\mathrm{T}$ をつくり，この $\mathrm{Con^{\star}}_\mathrm{T}$ が T で導出可能であることを証明した (Feferman 1960: 68,69, 定理 5.9)。文 $\mathrm{Con^{\star}}_\mathrm{T}$ は T の無矛盾性を表出はしていないので，この結果は第二導出不能性定理の意義を下げるものではない。そうではなくこれは，第二導出不能性定理の証明はシンタックスに関する述語や関係をコード化する際の内包的妥当性に依存する，ということを明らかにしているのである。

モストフスキーは別の例を与えている[44]。T は PRA を包含する算術の真な体系とし，$\mathrm{Pr_T}(x,y)$ は先ほどと同様に T の導出関係を表出しているとする。ここで

$$\mathrm{Pr^{\square}{}_T}(x,y) \ \leftrightarrow\ \mathrm{Pr_T}(x,y)\,\&\,\neg\mathrm{Pr_T}(x,\ulcorner\mathbf{0}{=}\mathbf{s0}\urcorner)$$

と定義する。「$\mathbf{0}=\mathbf{s0}$」は算術の解釈で「0 と 1 は等しい」となる T の文であり，T は真な体系なのでこれは T で導出できない。したがって，論理式 $\neg\mathrm{Pr_T}(x,\ulcorner\mathbf{0}=\mathbf{s0}\urcorner)$ はどんな数 x についても真である。すると，2 つの述語 $\mathrm{Pr_T}(x,y)\,\&\,\neg\mathrm{Pr_T}(x,\ulcorner\mathbf{0}{=}\mathbf{s0}\urcorner)$ と $\mathrm{Pr_T}(x,y)$ とは，まったく同じ順序対 (x,y) に対して真になる。すなわち $\mathrm{Pr_T}(x,y)$ と $\mathrm{Pr^{\square}{}_T}(x,y)$ は同じ外延をもつ。しかしこれらの内包は異なる。なぜなら後者は「$\langle x\rangle$ は，$\langle y\rangle$ の T 導出であるが，$\mathbf{0}{=}\mathbf{s0}$ の T 導出ではない」という関係を表出しているからである。ここで $\mathrm{Pr_T}(x,y)$ の代わりに $\mathrm{Pr^{\square}{}_T}(x,y)$ を使って“T の無矛盾性文”$\mathrm{Con^{\square}{}_T}$ を

$$\mathrm{Con^{\square}{}_T} \ \leftrightarrow\ \forall x\neg\mathrm{Pr^{\square}{}_T}(x,\ulcorner\mathbf{0}{=}\mathbf{s0}\urcorner)$$

と定義する。すると

$$\mathrm{Con^{\square}{}_T} \ \leftrightarrow\ \forall x\neg\Big[\mathrm{Pr_T}(x,\ulcorner\mathbf{0}{=}\mathbf{s0}\urcorner)\&\neg\mathrm{Pr_T}(x,\ulcorner\mathbf{0}{=}\mathbf{s0}\urcorner)\Big]$$

なので，$\mathrm{Con^{\square}{}_T}$ は述語論理の定理になり T で簡単に導出できる。これもまた第二導出不能性定理の意義を落としめるものではない，なぜなら，$\mathrm{Con^{\square}{}_T}$ が表出しているのは「どんなものも，$\mathbf{0}{=}\mathbf{s0}$ の T 導出であり同時にそうでない，ということはない」という，T の無矛盾性よりもずっと弱いことだからである。この例もまた，第二導出不能性定理の証明はシンタックスのコード化に関する内包的妥当性に依存する，ということを示しているのである。

第 Ⅵ 部

余　波

1 楽園復活？

集合論の無矛盾性の有限的証明がほとんどありえないことはどれくらい悩ましいことだろうか。ツェルメロの公理的集合論は，あらゆるクラスパラドクスの要因となる内包原理を避けつつ，明確な集合存在原理を与えた。しかし，ツェルメロが彼の公理系を初めて発表した頃 (1908)，それらの公理を満たすような，集合のユニバースの統一的なイメージを提供できる者はいなかった。そのような公理系は，矛盾する理論を便宜的に弱めただけのものとみなされた。ゆえに，ツェルメロ自身が述べているように，その無矛盾性は急を要する問題だった。1930 年 (ゲーデルが導出不能性を示した年) の論文の中でツェルメロは，ユニバースの統一的なイメージを与えた[1]。やがて彼の公理系はこのようなイメージの部分的な表現と考えられ，その公理系に対する信頼が一気に高まった[2]。ツェルメロのイメージの核心部分を次に解説しよう。

累積的階層としてのユニバース

ツェルメロによれば，集合のユニバースは累積的な階層構造をなす。どんなユニバースにもただ一つの最下層がある。最下層は空であるか，1 つあるいはそれ以上の要素をもつ。ただし，これらの要素自体は要素をもたない単一物でなければならない。この単一物をツェルメロは「原素 (urelemente)」と名づけた。原子とか個体ともいう。個体のどんな集合もユニバースの最下層におくことができるので，最下層の異なるユニバースはたくさんある。

最下層以外は，下の層から順に 2 通りの方法で構成される。まず，任意に層を定めると，そのすぐ上の層がただ一つ存在する。先に定めた層の要素はすべてその上の層にも属する。さらに，先に定めた層からのありとあらゆる要素選出に対し，その選出で選んだ要素全体のなす集合も上の層に属す。要素のどの

ような集まりにもそれに対する選出がありうる。空の選出やちょうど1つのものしか選ばない選出もある。まとめると，既定の層の次の層とは，既定の層の，要素すべてと部分集合すべてのなす集合ということができる。層の要素すべてを要素とする選出もある。したがって，各層はそれ自身 次の層に属する集合の一つであり，ユニバースの領域に属する集合である。各選出に対し，それによって選ばれた対象のみが満たす条件は表現できなくてもよく，任意の選出がありうる。ただし，表現可能な条件に対し，1つの層のその条件を満たす要素全体は1つの選出をなす。その層のどんな要素に対しても条件を満たすかどうかは明確だからである。

下層からの構成法の二つめはこうである。層の連続[3]した無限列に対して，これらの層の和集合を，その列に属する層すべての上の最初の層とする。これを極限層という。すなわち，ある対象 (個体もしくは集合) が与えられた列に対する極限層に属するとは，それがその列の中の層の少なくとも1つに属することである。最下層以外の層はどれも何かのすぐ上の層か極限層である。また任意の層は，それより下にある層に属するものすべてを要素にもつという意味で**累積的**である。どんなユニバースも最下層をただ一つもち，各層はすぐ上の層をただ一つもつ。つまり，ユニバースの累積的階層のはじまりは番号づけられた層の無限列である。最下層を V_0 とし V_n のすぐ上の層を V_{n+1} とする。ユニバースの構成法の二つめによって，無限番目の層 V_ω がある。V_ω は，下の層 V_n すべての和である $(n \in \omega)$。

一つめの構成法により，V_ω から再び，次の層，さらに次の層と絶え間なく続く。つまり，V_ω に V_ω の部分集合すべてを加えて $\mathrm{V}_{\omega+1}$ となり，$\mathrm{V}_{\omega+1}$ に $\mathrm{V}_{\omega+1}$ の部分集合すべてを加えて $\mathrm{V}_{\omega+2}$ となる。以下同様にして，$\mathrm{V}_{\omega+n}$ から $\mathrm{V}_{\omega+n+1}$ を得る。再び二つめの構成法から，2番目の極限層 $\mathrm{V}_{\omega+\omega}$ がある。実際，この過程が順序数に沿って続けられていく。

累積的階層としてのユニバースの着想がツェルメロのイメージの核心部分である[4]。この場合，集合とは何であろうか。先に述べたように，集合はクラスであり，外延性に従う。つまり，同じ要素からなる集合どうしは同じものである。では，どのようなときクラスは集合となるのか。ユニバースの領域に属する対象をそのユニバースの要素といおう。ユニバースの要素からなるクラスは，ある層の部分クラスであるとき，かつそのときに限り集合である。ユニバース

の要素からなるクラスは，どんな層の部分クラスでもないとき，そのユニバースに関する**真のクラス**であるという。真のクラスはユニバースの要素ではない。ユニバースに属する原子と集合だけがそのユニバースの要素である。真のクラスの例として，そのユニバースの層全体のクラスやユニバースの要素全体のクラスがある。ここで相対性は重要である。つまり，あるユニバースの真のクラスはより大きなユニバースの集合となりうる。

比　　較

累積的階層の要素としての集合概念と，フレーゲによって主張された述語の外延としての古いクラス概念は大きく異なる。集合論の言語の述語には，累積的階層において，その外延にあたる集合がないものがある。「x は順序数である」といった述語がそうである。また，累積的階層の集合は非可算個あるにもかかわらず集合の言語には可算無限の述語しかない。つまり，どんな述語の外延にもならない集合が累積的階層の中にある。フレーゲ流の概念では，ありとあらゆるものの総体が存在し，数学的言語による述語はそれを共通部分がなく，かつ余すところのない 2 つのクラスに分ける。すなわち，述語を満たすもの全体のなすクラスとそうでないもの全体のなすクラスである。自己矛盾を招いたこの考えと対比しながら，ゲーデルは (彼の用法に従って) **反復概念**といわれるようになったツェルメロの概念について次のように述べている。

> 「しかしながら，集合に関するこの概念 *) によると，集合は自然数 (もしくは，きちんと定義された対象) から「〜の集合である」という操作を反復適用 [5] することによって得られるものであって，ありとあらゆるものの総体を 2 つに分割して得られるものではない。ゆえに，どのような自己矛盾も導くことはなかった。」[6]

ホワイトヘッドとともに『プリンキピア・マテマティカ』の初版を出版する時までにラッセルが固めていたクラスの概念は，述語の外延であるという考えを維持しつつ次の 2 つの条件を加えたものである。(1) クラスはただ一つの型の要素からなる。(2) 述語は，循環論法原理に陥らないように考慮された文法的制限を満たさなければならない。二つめの条件は，クラスが理論的に構成されたものであるという見方に基づく。この点でラッセルの考えはツェルメロの考えと

---

*) 訳注：反復概念のこと。

まったく違う。しかし，任意の集合 (クラス：型理論では集合とクラスの区別がないことに注意) に対する単純型理論を考えることは有効かもしれない。そこでは，もっとも低い型は個体に割り当てられ，それ以外の型をもつ集合は，そのすぐ下の型をもつものだけの選出となる。

それを累積的階層であるユニバースと比べるとどうだろうか。累積的階層では，最下層以外の層に属する集合は，それより下の層の**どこから**要素を選出してもよい。**すぐ下**の層だけから選出する必要はない。しかし，型におけるユニバースの重要な特徴は維持される。型におけるユニバースに属する集合が１つの型をもつのとちょうど同じように，累積的階層の集合は１つのレベルをもつ。そのレベルは，その集合を要素にもつ最小の層である。累積的階層の層は整列順序で並んでいる。よって，各集合にはそれを部分集合として含む最小の層があり，その集合のレベルはそのすぐ上の層になる。明らかに，集合のレベルはその要素のレベルよりも高くなければならない。要素関係の循環鎖を防ぐにはこれで十分である。集合をそれ自身のレベルのすぐ下のレベルをもつものだけを要素にもつことにする必要はない。このような過剰な要求を避けることでより融通がきくようになる。累積的階層に対する型のユニバースは，社会階層が混ざりあうことを認める共同体に対する身分階層が厳格なカースト制度のようなものである。累積的階層における集合は，それ自身よりも低いレベルの要素を混在させることができる。これによって有限番目の層すべての和となる層を構成でき，超限集合の理論を展開することを大変容易にする。その上，集合論の言語には型による制限に類するいかなる制限もない。集合論の言語による述語は，どんなレベルの集合に対しても，真か偽のどちらかである。「x はそれ自身の要素ではない」を考えてみよう。累積的階層に属する集合はどれもその外延ではない。しかし，その累積的階層に属するものすべてで成り立つので「x はそれ自身の要素ではない」に間違いはない。

階層の原理から公理的集合論へ

以上の考えには層と集合に関する多くの原理が隠されている。そのうちいくつかはデイナ・スコットによって明確に定式化されたものである[7]。彼は集合論の公理がそれらからどのようにして得られるかを示した。集合とはまさに，あ

る層の部分クラスである。よって，まず次の**制限の原理**がある。

すべての集合はある層の部分集合である。

この逆は「ある層の要素からの選出はどれも集合である」となる。これから**階層の分出原理**

任意の層 V に対して，V に属する x で $\theta(x)$ を満たすもの全体のなす集合が存在する

がもたらされる。$\theta(x)$ は図式的に用いていて，明確な条件を表す 1 変数述語をさす。これら 2 つの原理からツェルメロの分出公理

任意の集合 m に対して，m に属する x で $\theta(x)$ を満たすもの全体のなす集合が存在する

を容易に導ける。階層の分出原理から，すべての層は集合である。ゆえに，それ自身の部分集合である。よって，すべての層はすぐ上の層の要素である。階層は累積的なので，実際には自分より上のどの層にも属する。つまり，もし層 V が層 W より下にあるなら，V ∈ W である。逆もまた正しい[8]。

集合をその要素としてもつ層 W は始層 (最下層) のはずがない。始層以外の層は，それより下の層の要素すべてと部分集合すべてのなす集合である。これがスコットの**累積原理**

任意の集合 m に対して，m が層 W の要素であることと，W に属し m を要素または部分集合として含む層 V が存在することは同値である。

である。スコットは，外延性の公理，分出原理，制限原理，そして累積原理だけを仮定して階層が要素関係で整列順序をなすことを証明した。彼は基礎 (もしくは正則性) の公理

任意の空でない集合 m に対して，m に属する要素をもたない m の要素がある

を経由してそれを示している[9]。基礎の公理により，要素関係による無限下降列 $\ldots x_{n+1} \in x_n \in x_{n-1} \in \ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0$ を包含する集合は存在しないことがわかる[10]。同様に，要素関係による循環 $y \in x \ldots \in y$ もない。

先述のように，階層が整列順序になることから，任意の集合に対し，その集合を要素にもつ最下位の層がただ一つある。それがその集合の**レベル**である[11]。個体のレベルは V_0 とする。b と c を任意の対象 (個体もしくは集合) とする。もしその2つがともに同じレベル V をもつならば，b と c は V に属する。それらが異なるレベル W と V をもち，V が W より上ならば，W は V の部分集合となり，やはり b と c は V に属する。したがって，選出 $\{b, c\}$ は V の次の層に属する集合である。このようにして対集合公理が得られる。

分出原理により空集合 $\emptyset$ は V_1 に属する。よって V_ω に属する。V_ω は，自然数 n に対するすべての V_n の和である。V_ω に属する任意の x に対し，それぞれ $x \in V_n$ となる自然数 n がある。したがって単元集合 $\{x\}$ は V_{n+1} に属し，よって V_ω にも属する。ゆえに，$\emptyset$ をもち，x を要素にもてば $\{x\}$ も要素にもつという集合 (つまり V_ω) が存在する。これがツェルメロの無限公理である。

集合 m を要素にもつ最下位の層 W，つまり m のレベルは，m の要素すべてを要素にもつ最下位の層の上にある最初の層である。階層は累積的なので，W 以上の層は m のすべての要素をもつ。したがって，

(♯) 任意の集合 m と任意の層 W に対して，m が W に属するならば m は W の部分集合である

となる。このことから，選択公理以外のツェルメロの当初の公理が集合のユニバースの概念に潜在していることが容易にわかる。

まず，ベキ集合公理

任意の集合 m に対して，m の部分集合全体のなす集合 $\mathbb{P}m$ が存在する

を考えよう。x を m の部分集合とし V を m のレベルとする。m は V に属するので，(♯) により V の部分集合である。よって x は V の部分集合の部分集合なので，x は V の部分集合である。V^+ を V のすぐ上の層とする。ある層の要素と部分集合はすべて，すぐ上の層の要素である。よって x は V^+ に属する。以上より，m の部分集合はすべて V^+ に属する。したがって，階層の分出原理により，m の部分集合すべてのなす集合は V^+ の次の層に属する。それが $\mathbb{P}m$ である。

次に，合併の公理

任意の集合 m に対して，m の要素の要素全体のなす集合 $\bigcup m$ が存在する

を考えよう。y を m の任意の要素とし x を y の任意の要素とする。また m のレベルを V とする。m は V に属するので，$\sharp$ により m は V の部分集合である。ゆえに y は V に属し，($\sharp$) から y は V の部分集合となる。よって x は V に属する。以上より，m の要素の要素はすべて V に属する。したがって，分出原理により，m の要素の要素全体のなす集合は V^+ に属する。それが $\bigcup m$ である。

選択公理

選択公理について述べる前に，選択集合の定義を思い出しておくとよい。m は空でない集合を要素にもつ空でない集合で，それに属するどの 2 つも共通要素をもたないとする。このとき，次の 2 条件を満たす集合 c を m の**選択集合**という。(i) c の要素はすべて m の要素のいずれかに属し，(ii) m の各要素は c と共通の要素をただ一つもつ。このとき，

> 空でない集合を要素にもつ空でない集合 m で，それに属する 2 つのどれもが共通要素をもたないものはいずれも，選択集合 c をもつ

が**選択公理**である。これは議論を引き起こす 2 つの考えを含んでいる。一つは，集合の選出をするときに制約がないことである。とりわけ，どの述語の外延にもなっていない選出があってもよい。「任意の選出 (arbitrary selection)」という意味で，これを AS ということにする。もう 1 つは，定義域が集合である関数あるいは割当ての存在にも制約がないことである。どの 2 変数述語によっても定義されない関数 f でよい。つまり，$\varphi(x, y) \Leftrightarrow f(x) = y$ となる φ は存在しなくてよい。「任意の関数 (arbitrary function)」という意味で，これを AF ということにする。この任意の選出と任意の関数があることを仮定する限りにおいて，以下の議論は選択公理の正当性を主張する。

m は空でない集合を要素にもつ空でない集合で，それに属するどの 2 つの要素も共通部分をもたないとする。また m のレベルを V とする。つまり m は V に属する。($\sharp$) より m は V の部分集合である。だから，m の要素 p はすべて V に属する。再び ($\sharp$) から，m の要素 p はすべて V の部分集合である。m の各要素 p に対して，それぞれ p の要素の 1 つを任意にとって $f(p)$ とする。このよ

うな関数 f の存在を仮定するときに，AF を用いている。m の任意の要素 p に対して，p は V の部分集合だから $f(p)$ は V に属する。m に属する p に対する $f(p)$ を集めると V の要素による選出になる。ゆえに AS から，m に属する p に対して $f(p)$ となるもの全体のなす集合 c が V のすぐ上の層に存在する。c が m の選択集合であることはすぐにわかる。

選択公理を疑わしく思う者は誰もこの議論もまた疑うだろう。だから，この議論は本当のところ選択公理の正当性を主張できていない。ただし，選択公理が，都合よく金てこを使うようなこととは違い，集合や関数，ユニバースの隠れた本質を部分的に明らかにするものだと思えることはこの議論の利点である[12]。

そもそも選択公理に関する疑いはどこからくるのだろうか。数学的実体についての構成主義者の見方に由来する場合もある[13]。しかし，関数についての混乱した考えも一因にある。19 世紀初め，関数は与えられた入力の値を計算する**規則**であると広く考えられていた。後に，関数は**規則によって決まる入力と出力の組の集合**と考えられた。ただし各入力には出力がただ一つあると考えている。先の概念と違い，入出力の組の集合として同じものを決める規則は，この概念では同じ関数を定める[14]。しかしこの概念も，各入力がそれぞれ出力をただ一つもつ**入力と出力の組の集合**というものに変わった。これがいま現在用いられている関数の概念であり，規則によって決定される必要がない点が異なる。選択公理への抵抗には，関数の古い概念にこだわっているからだと説明できるものがある。昔の関数概念を用いる人にとって，(空でない集合の集合に属する) 各集合 p から任意に選んだ要素 $f(p)$ による集合という考えには一貫性がない。選択を決める規則が存在することと，任意の選択というように選択を決める規則がいらないことをともに主張するからである。現在の関数概念で任意の選択をいったん理解すると，このおかしさはなくなる。ただし，たとえつじつまがあっているとしても事例に欠けることがあるだろう。任意の選択や任意の選出という概念の状況がまさにそうかもしれない。しかし，筆者のみるかぎり，このように考えるのは集合を理知的な人工物とみなすからだけである。そのような見方をやめれば，選択公理への反論は根拠がなくなるだろう。

置換公理

ツェルメロの当初のすべての公理と基礎の公理について述べてきた。後に，彼は**置換公理**

> 任意の集合 m と m を定義域とする任意の関数関係 F に対して，m の要素の F による値全体のなす集合が存在する[15]

を追加した。置換公理は累積的階層としてのユニバースという考えには現れない。公理的集合論について述べた第Ⅳ部の第１章で指摘したように，置換公理は，ものの集まりが集合であるとはそれが基数をもつことであるというカントルの考えに基づく。その一方で累積的階層からは別の見方もある。その要素のレベルの集まりが有界であることで集合は真のクラスと区別される。有界とは，それらすべてより上のレベルがあることである。y のレベルを $\mathrm{L}(y)$ とする。L は各対象にそのレベルを割り当てる操作とみなせる。このとき集合を区別する条件はこうなる。任意の集合 m に対して，m の要素 y のレベル $\mathrm{L}(y)$ 全体のなす集まりは有界である。これは次のように一般化できる。各対象に対してそれぞれただ一つの層を割り当てる任意の操作 $\mathrm{T}(y)$ と任意の集合 m に対して，m の要素 y に対する $\mathrm{T}(y)$ 全体のなす集まりは有界である。この一般化は，置換公理と同値であることがすでに述べた公理をいくつか用いて示せる。よって置換公理から階層についてわかることがある。例えば，階層の非有界なクラスを集合によって指示できない。集合論研究者風にいえば，階層に対して“共終的”となる集合はない。これは構造に関する主張である。しかし，ユニバースに属する集合と比較すれば，ユニバースの層は計り知れないほど多様であるともいえる。

反映原理

1960 年，レヴィ[16]は 30 年ほど前にツェルメロによってもたらされた集合のユニバースの反復的な見方に対して別の側面を明らかにした。それが反映原理の考え方である。よりわかりやすくするために，ユニバースの最下層をなす個体の集まり (空でもよい) を定めておくとよいだろう。反復によってまだ定まらな

いのは，定めた個体の集まりからはじまるユニバースの**上方の範囲**である。つまり，ユニバースはどれくらい広大なのかとまだ問える。無意味な答えをすることはやさしい。例えば，ユニバースは「完全」でなければならないとか，与えられた個体の集まりからつくられていく集合「すべて」を要素にもたなけらばならないと答えられよう。しかし，その問いそのものに正確で有益な答えがない。というのも，もしそのような答えがあるとしたら，それ自身のどの層とも区別されうる完全なユニバースを特徴づけるものでなければならないだろう。しかし，反復概念においてこのようなことは不可能である。そのような明らかな特徴をもつものを始点に「〜の集合」という操作をさらに繰り返して累積的階層をつくることができるからである。すなわち，その完全なユニバースをもう１つの層として扱うことができ，その要素のありとあらゆる選出をさらに高い層の要素にできる[17]。この考えをもとに**反映原理**という集合論の形式的原理が得られる。V を領域にもち，記号 $\in$ に V に制限した要素関係を割り当てる集合論の言語の解釈を $\langle V, \in_V \rangle$ とする。反映というのは，集合論の言語の任意の文 θ に対して，θ が真であることと，解釈 $\langle V, \in_V \rangle$ のもとで θ が真となる層 V が存在することは同値だということである。要するに，θ が真であることと，ある層 V で θ が真であることは同じということである。このような V を「θ に関してユニバースを反映する」という。これを θ 層といおう。反映の繰り返しを限りなく許せば，θ が真であることと θ 層のなす列が非有界であることは同値となる。これが反映原理である。

反映原理のもととなる考えは反復概念の自然な副産物である。よって，その十分に正確な形式化で，公理あるいは公理図式として加えられるものがある[18]。レヴィは反映原理の正確な形式化を与えただけでなく，もとになる考え方そのものを用いて，その原理を強めたものがどうすれば組織的に生じるかを示した。さらに，このように強めたものらが，だんだんと強くなっていく無限数に関する存在主張とそれぞれ同値となることを示した[19]。反映原理は実際に，無限公理と置換公理も含めすでに述べた公理から導かれる。我々の視点からもっと大切なのは，無限公理や置換公理が，反映原理からツェルメロの概念に帰着される二，三の公理 (すなわち，外延性，基礎，分出) を使って導かれることである。このように，反映の反復にまで広がった反復概念によって，公理の源としての「大きさの制限」という考え方，その最後の生き残りである置換の考え方を消し

去ることができる。

連続体仮説の独立性

集合に対して概念外延と異なる直観的な考え方をすれば,「集合」と関係「∈」に関する間接的な定義としての公理を頼らなくてもよい。よって，その公理では無限濃度に関する理論の主要な概念は言明できないというスコーレムの批判は，解析学の厳格な表現の枠組としての集合論の価値にとってもはや脅威ではない。しかし後の発見により，無限濃度や無限集合の理論は一般に無意味であり，真偽について何もいうことのできない単なる形式主義ではないかという不安が蘇った。

その代表的な発見は，カントルの連続体仮説が集合論の公理から独立であるというものである。**連続体仮説** (CH) は最初の無限基数，つまり自然数の個数と，実数の個数の間に基数がないという主張である。$\aleph$ を使えば，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ となる。1938 年までにゲーデルは，1 階公理的集合論が無矛盾ならば CH を加えた理論も無矛盾であるということを発見していた[20]。そして 1963 年にコーエンは，1 階公理的集合論が無矛盾ならば CH の否定を加えた理論も無矛盾であることを証明した[21]。この 2 つの結果から，1 階公理的集合論の無矛盾性を仮定すると，CH はそれから演繹的に独立であることがわかる。この発見をきっかけに，無限集合に関する主張へのヒルベルト流の形式主義者的態度が復活した。コーエンの発見が発表された数カ月後，ロビンソン (無限小についての厳密な理論を展開した数理論理学者) は CH の独立性を理由の一つにして「集合の概念全体が無意味である」という見解を表明した[22]。まもなくコーエンは，独立性の結果と無限公理を受け入れる満足のいく基準の欠如を理由に，無限に関する形式主義的見解を受け入れた[23]。

なぜこの発見がこのような強い哲学的反応をひきおこさねばならないのか。ゲーデルの第一導出不能性定理から，公理的集合論が無矛盾ならば，有限集合に関するそれと独立な主張が存在することは知られていた[24]。有限集合に関する主張の独立性は有限集合論に対する考えを変化させないのに，無限集合に関する主張の独立性が集合論の超限的な部分に対する考えを形式主義に向かわせるのはなぜか。CH の独立性が単独の結果でなかったことも理由の一つである。

コーエンの仕事はすぐに2つの形で拡張された。一つめに，次々と強い無限公理を付け加えていっても，それらの拡大が無矛盾ならば，CH の集合論に対する独立性が保たれることが示された[25]。二つめに，CH に対抗する連続体濃度に関する仮説で，集合論が無矛盾ならば集合論にそれを加えても無矛盾であるものが非常に広い範囲でみつかった。ベキ集合の濃度に関する一般仮説に対してもいえる[26]。これが意味するのは，集合論の公理として受け入れられているものは超限濃度をもつ階層におけるベキ集合の位置についてほとんど何もいっていないということである。CH やそれに類する主張の正しさを決めるような，非形式的原理や公理を超越した原理があるのならば，以上のことがこれほど影響力をもつことはなかっただろう。我々はまだこの問題を決定するべきいかなるアイデアももちあわせていない。CH の独立性がゲーデル文 (集合論でそれ自身の導出不能性を表すもの) の独立性とは異なる反響をもたらした原因はこれである。理論が無矛盾ならば，非形式的な推論によって，そのゲーデル文は真である。したがって，その独立性から有限集合に関する真偽のない文があると考える理由はない。

CH は，カントルが超限集合論を考案するにあたり解明することを目指した対象である連続体に関するかなり単純な予想である。よって CH の独立性は特に意義深い。カントルの理論の枠組みと点集合の濃度に関する彼の発見に基づけば CH は非常に自然な予想でもあった。しかし，(直観的には幾何的直線である) 連続体を点の集合とみなし点集合に無限濃度の理論を適用しないかぎり，連続体の濃度についての疑問はおこらない。もちろん，CH は連続体に言及しなくても表せる。それは自然数のべき集合の濃度に関する仮説と同等だからである。しかし，どのように形式化しても，無限集合と数に関する理論の中だけでおこる疑問のままである。したがって，連続体に関する問題すべてを明確に解決する手段をもたないかぎり，その理論では実際に解くことのできない問題がある。ここに至って我々は，問題が実際に答えをもつかどうか，「連続体の濃度」は単なる理論的人工物かどうか，無限濃度の理論全体が壊れた顕微鏡に写し出された色縞模様のような錯覚かどうかを問わなければならない。

懐疑的な情勢に対抗してして引合いに出される一つの事実は，CH もしくはその否定が2階集合論の意味論的帰結であることである[27]。2階公理的集合論のモデルとなるユニバースすべてにおいて CH は真であるか，または，そのよう

なモデルすべてにおいて偽であるかのいずれかである[28]。集合のユニバースに対する我々の理解の仕方は実際のところ2階であり，だから1階の公理は弱すぎてその基本的な性質をうまく記述できないというのがもっともらしい[29]。以上のことから，CHは真偽をもち，その独立性は1階の形式化が不適当であるためだと結論づけるかもしれない。しかし，この推論は正しくないであろう。なぜならCHとその否定のいずれも無矛盾な2階公理的集合論から導出できないからである[30]。すなわち，その公理系が無矛盾なら，CHは2階においても同じく独立である。そのうえ，無限集合論に懐疑的な人々は，(無限領域をもつ) 2階理論の意味論，少なくとも，2階の変数の動く範囲はその領域の部分集合すべてであるという規定条項にその疑念を向け，CHあるいはその否定は2階集合論の意味論的帰結である，という主張に対して形式主義者的態度をとるだろう。

以上のすべてにもかかわらず，形式主義者的反応は正当化されるわけではない。それは次の2つの論ずべき信念に基づく。(1) CHとその否定のいずれも真であることを知ることはできない。(2) 不可知の数学的真理は存在しない[31]。信念(1)は，連続体濃度は非常に多くの候補の中のどれであるかについて知る手がかりを現在のところもたないという事実に基づく。しかしこの考えは，将来まったく新しい数学が発見され問題が解決するという可能性を無視している。いまはどんなにありそうもなく思われるとしても，百年の間には様子はまったく異なっているかもしれない。信念(2)は，数学的事実はいわば人類の知性理想主義の所産であるという確信からきている。しかし，(若干のおもしろい試みはあるけれども) 理想主義者の数学についての説得力のある議論を筆者は知らないし，どうしてそれから(2)が推論されるかわからない。いずれにしても，理想主義への偏愛をなくせば，不可知の数学的事実があるということを信じられないなどということはない。

では我々に残された立場は何か。2つ，あるいは3つの可能性がある。「不確定な」を「その問題に関する事実がない」こととする。つまり連続体濃度が不確定とは，その濃度に関する問題がただ一つの正解をもたないことをいう。3つの可能性とはこうである。(i) 超限濃度に関するこれらの問題[32]は不確定でない。ただ知らないだけである。(ii) 集合のユニバースについての我々の概念にそって多様なユニバースが考えられ，そこから不確定性がもたらされる。(iii) 集合のユニバースについての我々の概念に一致する実在がないために不確定である。

(ii) の可能性は，CH が 2 階公理的集合論のモデル (があるとすれば，その) すべてにおいて同じ真理値をもつという事実に照らし合わせるともっとも支持しがたい。もしただの形式的結果としてでなく額面どおりにこれを受け取るならば (i) の可能性だけが残る。もし (集合論の) 単なる形式的結果であるとみなすならば，そのような意見の根拠はきっと集合論のモデルに対する形式主義者の一般的な意見の場合も同じであり，(iii) の可能性を避けられないだろう[33]。(i) あるいは (iii) を支持する決定的な議論はいまのところまだない。それゆえ，これらが我々が今直面しなければならない可能性ということになる。

この状況はどれぐらいの害をなすか。CH の独立性とそれに関連した事実が無限濃度の理論に対する本来の期待に手ひどい打撃を与えたことは疑いない[34]。たとえそうであっても，理論の信頼性は少しもゆらぎはしない。(有限的文に関する) 信頼性と無矛盾性は通例の集合論の体系では等しいうえ，独立性の発見によって理論の無矛盾性を疑う理由はない。そのような理論は，つじつまのあわなくなる兆候のない概念を部分的に表明しているにすぎない。おそらくそうであるが，もしその概念のつじつまがあっているならば，具体例をあげられるかどうかにかかわらず，それ (もしくはその一部) を表したものは無矛盾であろう。

結　　論

集合論は，複雑だがおそらく整合的な概念を部分的ではあるが明瞭に表現しているというのが本章の主旨である。外延性や任意選択の原理，そして拡張された反復概念の中に潜む公理で，実際に使われ教科書に普通に出てくる集合論の公理はすべてが出つくされる[35]。したがって，公理的集合論は少ない犠牲で不快な結論を避けるためにご都合主義でつくられただけの単なる一団の主張ではないと結論づけてよいだろう。実際それは，集合のユニバースに関する複雑だが非常に自然な概念から誕生したのである。このように我々は集合論のモデルについて確かな考えをもっている。このことから理論が矛盾するおそれは当然ながら薄らぐ。そして反復概念の枠組でのクラスパラドクスに対する説得力のある分析と解決が，さらなる確信のもととなるだろう。それが次章の話題である。

2

クラスパラドクスの解決

集合のユニバースについてのツェルメロの見方に従えば，ユニバースの始層をなすことができる原子のクラスに制限がないので，たくさんのユニバースが存在する。しかし始層を定めても，ツェルメロの見方ではユニバースはいろいろ存在する。「ユニバース」という肩書きをもつどんな候補もより高い層を形成するために，綿々と繰り返す手続きの出発点としてとることができる。それゆえ，そのユニバースの候補自身がまさにより大きなユニバースの始切片になるので，(始層を定めたとしても) 絶対的な包括的ユニバースは存在しない。各層は順序数によって番号づけられているので，この考えは順序数列を用いて表すことができる。ツェルメロはこう書いている。「このような列はその限りない前進において本当の意味の完成には達しない。しかし，相対的な停止点だけはもつ[1]。」ユニバースUの，集合全体のなすクラスや順序数全体のなすクラスといった真のクラスは，Uの集合ではないがUを拡張したどのユニバースにおいてもそれに属する集合になる。それは，UにUの要素の選出すべてを付け加えて得られる層に属する集合となるからである。ここにツェルメロはクラスパラドクスの解決をみたのだ。集合論のユニバースを集合論のモデルと考えてツェルメロはこう述べた。

> 「このようにして，超限数列の際限のない拡張により，区別可能なモデルの無限列として集合論自身が表現される。(非範疇的な) 公理系のこれらのモデル間の厳密な区別によって，超有限的自己矛盾がうまく解消される。というのも，1つのモデルの非集合はその次以降のすべてのモデルに属する集合として現れるからである。」[2]

それではさらに深くツェルメロの考えを調べていこう。

クラスパラドクスに対するツェルメロのアプローチ

手短かにパラドクスを思い出しておこう。ブラリ・フォルティのパラドクスは，順序数全体のなすクラス Ω がそれ自身より大きい順序数をもつという結果に対する議論である。カントルのパラドクスはこうである。ユニバーサルクラス U はその部分クラスをすべて要素にもっていなければならない。したがって，U はその部分クラスと少なくとも同程度の数の要素をもつ。しかしカントルは，どんなクラスもその部分クラスの数よりも少ない要素しかもたないことを証明した。ラッセルのパラドクスは自分自身の要素にはならないもののクラス R に関するパラドクスである。少し考えれば，R が R に属することと R が R に属さないことが同値であるという結論に達する。

カントルとブラリ・フォルティのパラドクスを扱うために，カントルは集合と，後に真のクラスといわれることになる絶対無限多数との区別を設けた。クラス Ω, U, R は集合ではない。Ω は真のクラスであり順序数をもたないから，ブラリ・フォルティのパラドクスは解消される。カントルとラッセルのパラドクスは，真のクラスはクラスの要素となることはできないという，フォン・ノイマンによって明らかにされた仮定において解消される。しかし，これではこれらのパラドクスをほとんど解決していない。真のクラスはクラスの要素となることはできないと，信じるための独自の理由が必要である。この点について，真のクラスはクラスの要素であるにはあまりにも大きいということがよくいわれる。しかしこれもなお神秘的である。どうして，クラスの大きさによって他のクラスの要素になることが禁じられなければならないのか。

ツェルメロの提案は異なる。明白に述べはしなかったが，彼の考えによれば，やっかいなクラスの表記はそれぞれ絶対的な言及対象をもたないことがわかる。それが言及するものは，どのユニバースが議論中の領域かに依存する。しばしば起こることだが，用いている文脈でユニバースを定めないと「この集落の人口」のように意味の定まらない文脈依存指示語を含む名詞句と同じく，その表記は何の言及もしない。ツェルメロの考えでは，ユニバースは二階理論の ZFC ＋ AF の公理がすべて成り立つ累積的階層である。領域がユニバース V のときは「順序数全体のなすクラス」は V における順序数全体のなすクラスを示す。その適切な文脈的要因を明白にするために，これを Ω_V としよう。Ω_V は V に属

する集合ではない。しかし，V の拡張であるどんなユニバースにおいても集合であり，それに属する順序数のどれよりも大きい順序数をもつ。この大きな順序数は V の拡張であるユニバースのどれにも属しているが，V に属さないから Ω_V には属さない。したがって，この新しい順序数が自分自身より大きいということは導かれない。この種の問題は「～は順序数である」という述語が文脈によらないはっきりと固定された外延をもつと仮定した場合におこる。この仮定がツェルメロのアプローチでは拒否された。

ユニバース V を領域として扱うとき,「すべてのもののクラス」もしくは「ユニバーサルクラス」は，V に属するすべてのもののクラス，すなわち V 自身を意味する。V はその部分クラスすべてを要素としてもつわけではないので，V の濃度が少なくとも $\mathbb{P}V$ の濃度と同じぐらい大きいと結論づけられない。したがって，カントルの定理と矛盾しない。述語「～はものである」を文脈によらないはっきりとした外延をもつとしたことで，パラドクスはおこる。言語のプラグマティクな性質を考えれば，これは納得し難いことかもしれない[3]。

述語「～は実体である」は「～は存在する」という述語と同義のもの，また「～は自己同一である」と同じ広がりをもつものとして解釈される。ツェルメロのアプローチにおいては，これらの述語は文脈によらない固定された外延をもたない。カントルのパラドクスは「もの」という語が使われているかどうかには関係ないということが，まさに的を射た点である。「すべてのもののクラス」の代わりに「すべてのクラスのクラス」という述語を使っても，同じ理屈で矛盾に達する。解決策は同じである。V を領域として扱うと「すべてのクラスのクラス」は V に属するクラスの全体である。これを C_V としよう。C_V の部分クラスがすべて C_V に属するわけではないので，C_V の濃度が少なくとも $\mathbb{P}C_V$ の濃度以上だと結論づける理由はない。したがって，カントルの定理と矛盾しない。述語「～はクラスである」は文脈によらない固定された外延をもつという仮定が，否定されたのである。

領域 V の文脈において「自分自身の要素でないものすべてのなすクラス」という表現は，V に属する自分自身の要素でない要素全体のなすクラスを意味する。このクラスを R_V としよう。それ自身の要素にもなるような累積的階層の要素は存在しないので，R_V は V とまったく同じである。しかし，ここでその事実を使う必要はない。R_V は，V を拡張した任意のユニバースにおいて，V の

後の層すべてに属する要素であるが，R_V はそれ自身の要素ではない。R_V がそれ自身の要素でないことは，それが R_V の要素になるための条件を満たすことを意味し**ない**。というのも，その条件は V の要素であってそれ自身の要素ではないというものである。R_V は V の要素ではないので条件を満たしていない。したがって，ラッセルのパラドクスの議論は成立しない。「x は x の要素ではない」という条件が文脈によらない固定された外延をもつことが正しいのなら，その議論のとおりであろう。しかし，その仮定はここでは拒絶されている。「自分自身の要素でない**もの**全体のなすクラス」の代わりに「自分自身の要素でない**クラス**全体のなすクラス」を使っても，同じ考察があてはまる。

パラドクスへのツェルメロのアプローチにおいて，絶対無限多数や要素となるには大きすぎるクラスは存在しない。各ユニバースに**相対して**，真のクラスという考えがあるのである。V をユニバースとすると，V のどこかの層の部分クラスとならない部分クラスはどれも V に属する集合ではなく，また V に属する基数をもたない。V のそのような部分クラスは，V に関して真のクラスである。しかし，V を層としてもつ最初のユニバースやそのすべての拡張において，基数をもつ集合となる。

ツェルメロの解決法の完結

議論の中で矛盾を導いた欠陥をみつけるだけでは解決にならない。なぜそれが欠陥なのか，なぜ我々はそれを見落としたのか，ということも説明しなくてはならない。ある特定の述語が文脈によらない固定された外延をもつと考えることに欠陥があることはわかる。このとき (基礎となる原子を固定した) 集合の絶対的包括ユニバースの存在を仮定しているが，実際にはそのような全体的なユニバースは存在しないので，その仮定は間違っている。

なぜ我々はそのような欠陥を見抜けなかったのか。述語の外延が文脈に依存している場合にそれを見きわめることはつねに難しいわけではない。例えば,「〜は大きい」という述語を考えてみられたい。では，クラスパラドクスにかかわる述語の場合に，文脈への依存性が理解されなかった理由はどのように説明したらよいだろう。これには 2 つの要因が結びついていると思う。一つめの要因は，集合論のモデルを研究しはじめるまで，実際の文脈依存としての集合論の

ユニバースについて意識を払わなかったことである。早くから集合論の基礎について知っていながら，かなり後になるまで誰もそれに気づかなかった。もう1つの要因は，集合論の研究と発展は普通，ユニバースを固定せずに行われることである。その結果は，どんなユニバースにも (つまり，基になる個体がどんなものでも，またその階層の高さがどの程度であるとしても) あてはまる。だから領域を固定する必要を感じないのだ。領域についての明示的な言及がないので，我々は集合論の言語を使うときにパラメータを見落としているとは思わない。したがって，非形式的な述語を用いて，その領域 (「すべての集合」あるいは「すべての個体とすべての集合」のさす領域) を固定すると論議になる。「〜は順序数である」とか「〜は自分自身の要素ではない」とかいった述語の外延はその領域の一部である。こうして，この特殊な文脈依存の形を見抜く難しさの説明がつく。

これらの考察から,「〜は集合論のユニバースである」という述語が文脈によらない絶対的な外延をもつかどうかという疑問がおこる。たとえ集合論が何かということが定まっていても，その述語は絶対的な外延をもたない。そうでなければ，またパラドクスがおこる。ユニバースの話は図式的な特性をもつ。文脈において，扱う領域としてユニバース U が指定され固定された場合に限り，その話は命題の特性をもつことになるであろう。その場合,「〜は集合論のユニバースである」という述語は，(仮にあったとして) U に属する集合論のユニバースをなす集合全体にあてはまるであろう。実際ツェルメロは，ユニバースの非有界列を層の列として含むユニバースを調べた[4]。しかし，領域としてユニバースを固定することなしでは，(パラドクスに対するツェロメロの解決策を完成するのに用いたものを含めて) ユニバースに関する話は厳密な意味ではいわゆる命題からは構成されない。

よってツェルメロの解決策は崩壊しない。用いられている文脈では意味のない (隠れた) パラメータ付きの言語を使った論議も無意味である必然性はない。それは有益な情報をもち，真理でなくとも真理を示唆するものでありうる。例をあげよう。

対象 x が対象 y の左にあるなら，y は x の左にない。

この場合，欠けているパラメータは観測者の場所と向き (または視点) である。

もし我々が心の中で視点を与えて考えることができるならば，この思考は真理を示唆するものである。このように隠れたパラメータに値を与えることによって，その結果は真理に関する思考になるだろう。このように有益な情報を有する非命題的思考の例をあげた。しかし，これは真理を示唆するものであるが，厳密な意味で真ではない。これに対する唯一の反論は，この思考を次の全称命題と同一視することである。

任意の視点 v に対して，対象 x が視点 v に関して対象 y の左にあるなら，y は視点 v に関して x の左にない。

これら 2 つの思考は密接に関連しているけれども同じではない。後者によって明記される思考では，視点の概念がなくてはならない。一方，前者の思考においては (「～の左」という概念を用いる感覚は視点的感覚には違いないが) 視点の概念はなくてもよい。パラドクスの解決でなされた主張，例えば「あるユニバース V の真のクラスは，V を含む任意のユニバースにおける集合である」という主張は，前者の思考のようなものある。有益な情報をもった非命題的思考であり，真理ではないが真理を示唆するものである [5]。

うそつきパラドクス

ツェルメロ流のアプローチの意外な利点は,「～が真である」という述語の使い方を「レベル」で示すことによって，うそつきパラドクスが解決できることである。それは，うそつきパラドクスに対するタルスキ，パーソンズ，クリプキ，バージらによるさまざまな対応において共通に提案されている [6]。これらのアプローチでは，レベルを意識した途端に矛盾へと導かれる推論は阻止されることになっている。どのアプローチを好むかによって，レベルは，言語の性質だったり，述語「x は真である」の外延とそうでない部分の性質だったり，発話の性質だったりする。レベルを示すものがないと，次のタルスキの図式を適用して，うそつき文は，それが真であることと真でないことが同値になってしまう。

$[p]$ は真である $\Leftrightarrow p$.

ただし，[p] は「p という命題」あるいは「p という文」,「p という言葉」を意味する。明確にレベルを示すことによる結果は，パラドクスを扱うときに用いられる理論に細部にわたって依存するが，レベルの明示によるタルスキの図式の適切な修正を次の形で述べてもよいだろう。

[p] は 真$_{\alpha+1}$ である ⇔ p.

ただし，α は [p] のレベルとする。インデックス付きの真理述語を用いたうそつき文は次の形になるであろう。

(L) L は 真$_{\alpha}$ でない。

この修正は次のような安心できる結論をもたらす。

L は 真$_{\alpha+1}$ である ⇔ L は 真$_{\alpha}$ でない。

しかしこのようなアプローチの問題は，インデックスを量化することによってパラドクスが再現されうるように思われることである。すなわち，次のような新しい述語「〜は**真**である」を定義することができる。

x は**真**である ⇔ x が 真$_{\alpha}$ であるようなレベル α が存在する。

次に，L を「L は**真**ではない」という文だとする。「〜は真である」の代わりに「〜は**真**である」のタルスキの図式

[p] は**真**である ⇔ p

を使って不合理が生じる。よって，レベルによるアプローチには補足が必要である。レベルが整列順序だと仮定すれば (これは「レベル」によるアプローチと明らかに矛盾しない)，レベルのインデックスは事実上，順序数である。ここにツェルメロの発想が貢献する余地がある。定義の文脈が順序数全体のクラスの範囲を定めるユニバースを決定しないかぎり，絶対的述語「〜は**真**である」を定義する試みはうまくいかない。ユニバース V が決まると，その定義は V の中での次の真理の概念を与える。

x は V で真である ⇔ x が 真$_{\alpha}$ であるようなレベル α が V に存在する。

V に属さない最初の順序数を「κ」とすれば,「x は V で真である」は「x は 真$_{\kappa}$ である」と等しい。だから

(L_V) L は V で真でない

は，レベル κ の文である。レベルに関係ないタルスキの真理図式は L_V に適用できない。明確なレベル付きの真理図式を適用することで，

L_V は 真 $_{\kappa+1}$ である ⇔ L_V は V で真ではない

を得る。これは自己矛盾ではない。それは次の主張と等しいからである。

L_V は 真 $_{\kappa+1}$ である ⇔ L_V は 真 $_{\kappa}$ ではない。

真理の定義はユニバースに必ず依存する。したがって，レベルなしではうまくいかない。換言すれば，究極の「量化」には順序数すべてのクラスという究極のクラスがいるのだが，これはありえない。これは解決策についてのただのスケッチにすぎない。この解決において重要な言明がレベルをもたないことを明らかにしなくてはならない。クラスパラドクスのツェルメロの解決における言明のように，それらはその性質上，有益な情報をもつが命題的でない，つまり，真ではないが真理を示すものである思考を表すという意味で，図式的である。

結 論

解析学を悩ませたあいまいさと矛盾は，19 世紀後半の集合論の枠組みにおいて解析学に厳格な表現を与えて展開することで払いのけられるように思われた。その楽観的な見通しは，世紀の変わりめに超限集合に関するパラドクスの発見によってくつがえされた。ツェルメロは，それらのパラドクスが再現できないようにその理論を公理化した。しかし，その公理は集合の世界の明確な概念からもたらされるものではないように思われたので，集合論には他のパラドクスが潜んでいるのではないかという大きな心配があった。ゆえに，当時のクラスパラドクスの解決は説得力がなかった。しかし，集合に関する理解がさらに発展し，反復概念を用いて，集合論の整合的イメージで，標準的公理によって部分的に記述されるものがつくられた。以上のことが前章までに示されたことである。この章では，ツェルメロの考えに基づいたクラスパラドクスの解決法について述べた。それは反復概念の自然な結果である。それは長い間正統的であった「大きさの制限」によるアプローチのような，その場限りの説明とはまったく違う。

我々は昔のパラドクスの遺物にわずらわされるべきではない。カントルは新

しい種類の実体を導入した。超限集合である。数学の歴史を振り返れば，我々が新しい実体を導入するときには，その新しい実体にも適用できるように，かつての手法や原理を制限する方法が明らかになるまで，パラドクスが起こりがちであることがわかる。これらのパラドクスが容易に解かれないときは，新しい実体に疑いの目が向けられる。負の整数さえ最初は疑わしく思われていたことを思い出してほしい。アルノーのパラドクスのようなパラドクスは，負の整数への当初の抵抗に疑いなく貢献した。クラスパラドクスを別にしたほうががよいという理屈はない。それらによって，超限集合についての我々の当初の理解が支離滅裂であったことだけはわかる。つねに我々は理解を深めていくことはできるけれども，我々の集合についての現在の考えは，矛盾に対するどんな理性的なおそれも払いのけるほどには明晰でない。ゆえに，集合論の整合性，したがって，その中でつくることができる数学 (古典数学のすべて) の整合性を合理的に信用することができると結論できる。

誤解を避けるために，この結論について 2 点強調しておかねばなるまい。たとえ集合論の**整合性**に対する確信が合理的であるとしても，集合論のすべてが正しいのかをまだ疑うことができる。実際には，整合的な概念に応えるものは何もないのかもしれない。例えば，存在論的有限主義が正しいなら，無限公理が成り立つユニバースは存在しない。集合論の真理に対して合理的な信頼を得るのには他の考察が必要である。それが，ここ数十年の数理哲学の多くの議論の源である。第二に，集合論の整合性は確実というよりどちらかというと**確信**できるとするほうが合理的であるという結論がある。それどころか，我々は集合論の無矛盾性について合理的な確信をもっているかもしれないが，無矛盾性の有限的証明によってもたらされるであろうある種の確実性を合理的にいだくことはできないのである。それならば，数学についての何が確かであると感じることができるのだろうか。それらにかかわる問題は次章で考察する。

3 確かさを求めて（結論）

ゲーデルの導出不能性定理は一つの分岐点であった。この定理やその周辺の事実が十分に理解されるようになると，ヒルベルトのプログラムは追求されなくなり，他にそれほど意欲的な数学の基礎づけに関する研究プログラムが提起されることはなかった。集合における反復概念が広く認識されていくにつれ，集合論が矛盾しているかもしれないという心配は，当然のように和らいでいった。基礎づけの研究に影響を与えていた切迫感がなくなったからである。にもかかわらず，認識論的な基本問題が残った。有限の立場にあるかぎり，大部分の数学の信頼性は確かめられない。では，確かめることが**できる**のは何か。あるいは，ある数学領域に対する信頼性，つまりその無矛盾性が確かめられないにもかかわらず，それを高く信用できることがあるだろうか。

確実性とは，ここで筆者がいう場合，どんな疑いもまったくない信念をさす。基礎論家が確実性を求めるというとき，それは認識論的に理にかなった確実性を求めるという意味である。与えられた命題の確実性が合理的かどうかは，信じている者の認識上の立場による。自分自身がこの本のあるページのある単語をいま見ている，ということをあなたが疑わないのは合理的である。しかし，もし幻覚剤の影響を受けているという証拠があるとしたら，それは合理的ではないだろう。クラスパラドクスの発見は，我々の共通認識を変えた。無限クラスや無限列による実解析の記述によって解析学の整合性が19世紀までにもたらされたが，その合理的な信用を高めることは事実上できなくなった。基礎づけに関する研究プログラムは，少なくとも部分的には，このような妨げをなくすように我々の認識上の立場を改めようとしたものだった。認識上の立場だけでなく探求する文脈においても確実性が合理的かどうかは異なる。感覚的な証拠に対する疑念の探求では，たとえ認識の機能不全を心配する理由がなくても，あなたの目の前の本の存在を疑わないわけにはいかない[1]。しかし基礎づけに関

する研究においては包括的なデカルト的懐疑はいらない。その目的は，無限で抽象的なものに関する非有限的な推論によって生じる問題を克服することである。つまり，有限で具体的なものに関する計算については，詳細な説明さえ与えられれば，確実であると思ってもさしつかえない。

ゲーデルの導出可能性定理以前の基礎論プログラム

フレーゲの公理Vから矛盾が導かれることを発見して，ラッセルは本質的に必要なもの，つまり分析的なものに関する我々の感覚の間違いやすさを痛感した。以来，分析的真理やそれを越えるものに対して合理的確実性を示そうとはもはやしなくなった。しかし，十分な信用をもちうることを示す期待は残った。ラッセルとホワイトヘッドは，2つの方法によってそれに寄与できるのではないかと考えた。一つめの方法は，パラドクスを生む当面の議論が展開されないように制限した文法的枠組みをもつ形式言語において，適切な数学をどうやって展開できるかを示すことだった。彼らが考えたものは分岐型理論である。しかし，それは意図している数学にとって，あまりにも制約が多すぎた。単純型理論では，その許容範囲が広がるので，この問題は解消される。それは，初期の基礎論研究を悩ませたパラドクスを避けられる程度には厳格であり，またさらなる矛盾が起きる兆候もない。合理的に信用をうちたてるための方法の二つめは，認識上の支持関係を明らかにすることだった。ラッセルは次のような興味深いことを考えていた。実数や解析学の法則は，それらを導くのに用いられた公理によって支持されるであろう。さらに，それらの公理は，それらによるもっとも確かな帰結によって支持されるであろう。ただし，そのような帰結がよりもっともらしい別の対立する公理から導かれたりせず，どんな間違った帰結も導き出されることが知られていない場合に限る。公理に関するラッセルの認識論をどのように理解しようと，このような手段で『プリンキピア・マテマティカ』における公理が支持されることを示す研究をラッセルや他の誰もしなかったことは明らかである。ホワイトヘッドもラッセルも彼らの導入した無限公理や選択公理が十分に支持されうるとはまったく思っていなかったし，やがて還元可能性についても同じように考えた。もちろん，解析学における命題が自分自身より不確かな公理から導出されても，そこから得られる支持はほとん

どない。だから,『プリンキピア・マテマティカ』の公理から解析学の法則を導くことでは，解析学に高い信用があることを示すという控えめな目的さえ押し進められなかった。その記号理論を単純型理論と解釈してもこれは変わらない。論理主義の研究プログラムによって得たものは結局，解析学やカントルの無限クラスの理論の多くはクラスパラドクスをおこなさい，一見して無矛盾な理論体系の中で展開できるということの確証であった。

ツェルメロの公理的集合論の形式化やそれ以降の発展によっても，それくらいは達成できた。しかしヒルベルトの目的は違った。そういった数学領域の正しさが合理的に信用できることを示す代わりに，有限的帰結に関する限り，それらが信頼できることを合理的に確かめようとした。その目的は野心的側面とそうでない側面をもつ。真理よりも信頼性に注目している点であまり野心的ではなく，信用よりも確実性を目指している点でより野心的である。確実性を求めるためには，出発点から合理的に確実な前提と推論様式で構成される証明がなければならないだろう。これらは，有限的数学 (つまり記号の列に適用する明白な計算についての数学) からもたらされうるものだった。この文脈において，この基準が確かに正しいことはもっともだったし，いまもそうである。この基準に基づく信頼性の証明があればその結論に確実性を与えられたであろう。信頼性は明らかに無矛盾性を意味する。このように，集合論の信頼性の有限的証明があれば，集合論が無矛盾であることが合理的に確かめられたといえよう。この状況をよく考えると，そのような確実性を合理的な理由で損なう発見は将来もありえないことがわかるだろう。ヒルベルトは，彼の目的が基礎付けの問題を永久に解決することだと繰り返し述べた[2]。望まれていた証明が現れていたとしたら，そのような普遍性が成し遂げられたのであろう。この研究プログラムの考えは，目的と戦略の両方において，ホワイトヘッドとラッセルのプログラムよりもはるかに勝っていた。しかし，第 V 部の第 2 章で述べたように，ゲーデルの第二導出不能性定理に集約される理由から，それは達成することができなかった。実解析やその他の信頼性の証明には，有限的推論という安全な根拠を超えた手段や前提を用いなければならないだろう。

その後の基礎論プログラム

ヒルベルトのプログラムの崩壊以降，それほど野心的でない研究プログラムがいろいろあった。ヒルベルトのプログラムの縮小版もある。それらを概観してみよう。ゲンツェンは有限的方法と ϵ_0 までの帰納法を用いて算術の無矛盾性を証明した。さらに ϵ_0 がそのような順序数として最小のものであることを証明した[3]。このゲンツェンの流れを汲んで，算術を拡張した形式体系の無矛盾性を示すのに，有限的方法に加えてどの順序数までの帰納法があれば必要十分かをみつける研究プログラムがある[4]。これは，ある認められた理論の無矛盾性を確立するためにどれくらい有限的推論を超えなければならないかを特徴づける方法である。ふさわしい帰納法原理を与える順序数は，有限的推論からどれくらい離れているかの尺度だと考えられるだろう。しかし，これがどんな認識論上の意味合いをもつのかは明らかではない。無矛盾性の証明における不確かさを用いられている帰納的原理に限るなら，順序数が不確かさの尺度であると思ってもよい。しかし，順序数を上げるにつれて帰納法原理の不確かさが増していくとは考えにくい。したがって，このプログラムにおける研究の基礎論的意味合いを説明するためには別の考察が必要である[5]。

解析学のさまざまな部分の強さを測る一つの方法は，集合存在公理によって分類された形式体系のうち，与えれらた解析学の定理が証明できるもっとも弱い体系をみつけることである。これは「逆数学」といわれる[6]。Z_2 とよばれる解析の形式体系を使って，多くの重要な解析学の定理 τ に対して，τ を導く Z_2 の自然な最弱の部分体系があることが知られている。研究によると，強さの異なるこのような体系はわずかしか現れない。ヒルベルトプログラムをこれらの体系に適用してみると，ある基礎づけに関する結果を得る。例えば，WKL_0 とよばれるこれらの部分体系の一つは，その有限的信頼性が有限的手段によって得られる[7]。これのおもしろいところは，いくつかのよく知られた非構成的定理を含めて，実際に使われる非有限的数学のかなりの部分が，WKL_0 において導かれるということである[8]。このように，基礎論的に重要なヒルベルトのプログラムの部分的な実現がもたらされる。つまり，多くの普通の数学は，反駁される危険のない手段によって信頼性を保証されているのである。

有限の立場の他にも，何が確かで何が疑わしいとみなすかによって，さまざ

まな基礎論的観点がある。よりゆるやかな立場の一つは，再帰的に数え上げ可能な集合や数列についての数学は確かなものとして認め，それ以上は認めないというものである。可述的数学だけを確かなものとして受け入れる別の立場もある。またそれとも違って，ある種の構成的数学だけを認める立場もある。このようなそれぞれに制限された立場に応じて，ヒルベルトプログラムに似た発展性のある研究プログラムがある。基礎論の研究プログラムに対するこのアプローチについてはフィファーマンによって詳細に述べられている[9]。フィファーマンの記述を少し修正していうと，この手のプログラムが目指すものは次のことである。

> ある数学領域 $\mathcal{M}$ は，制限された立場 $\mathcal{F}$ で正当化されない形式体系 T_1 で再現されるとする。このときに，T_1 を立場 $\mathcal{F}$ で正当化される体系 T_2 に証明論的に還元する。

ここで，$\mathcal{F}$ は一般に，有限の立場，可述的立場，構成主義などといった基礎論的な「主義」を表す。核となる概念は証明論的還元性である。大ざっぱにいえば，証明論的還元可能であるとはこうである。T_1 と T_2 に共通の言語における文の再帰的に定義された集合 Φ に関して，体系 T_1 が T_2 に**証明論的に還元可能**とは，次の 2 条件をともに満たす，T_1 導出 (T_1–derivation) 全体上のエフェクティブな演算 $\mathbf{f}$ が存在することである。

(1) Φ に属する文 y が T_1 導出 x をもつとき，$\mathbf{f}(x)$ は y の T_2 導出である。

(2) コード化によって (1) を形式的に表したものは T_2 導出可能である[10]。

Φ としては，基礎論的立場 $\mathcal{F}$ において，意図されている解釈上，真偽の明確な文からなる集合を選ぶ。例えば，$\mathcal{F}$ が有限の立場で T_2 が PRA ならば，原始再帰的関数を表す項[11]の等式や不等式全体のなす集合を Φ とする。

もし Φ に関して T_1 が T_2 に証明論的に還元可能ならば，T_1 から導出される Φ に属する文はどれも T_2 からも導出される。さらに，それを形式的に表現したものも T_2 から導出される。したがって，ふさわしい Φ に関して T_1 が T_2 へ証明論的に還元可能ならば，T_2 が無矛盾ならば T_1 も無矛盾であることが確証される。(「$\mathbf{0} = \mathbf{1}$」のような) 矛盾は T_2 導出可能に限り T_1 導出可能だからである*)。立場 $\mathcal{F}$ において T_2 が正当であるとすれば，Φ に関する T_1 の T_2 への

*) 訳注：条件 (1) による。さらに条件 (2) から，この相対無矛盾性は T_2 導出可能である。

証明論的還元があると，立場 $\mathcal{F}$ にとって数学領域 $\mathcal{M}$ は Φ に属する文に関して信頼できる。よって，もし立場 $\mathcal{F}$ からみて真偽値の定まった形式的文がすべて Φ に属すならば，$\mathcal{M}$ は立場 $\mathcal{F}$ にとって信頼できる。証明論的還元性の主な意義はこれである。

先に述べた解析学の一部に対するヒルベルト型の研究プログラムの成功は，この枠組みにおいて，T_1 を WKL_0，T_2 を PRA，Φ を PRA の閉じた項の等式および不等式全体の集合としてあてはまる。$\mathcal{M}$ は形式化を通して WKL_0 から導かれるような解析学の定理からなるものであり，$\mathcal{F}$ は有限の立場である。(原始的再帰算術として解釈される) 有限の立場の考えには非有限的な考えにはない確かさの特質があるので，WKL_0 で再現される解析学と代数学のかなりの部分の有限的信頼性は確証されているといえよう。

フィファーマンの可述的立場の研究プログラム

このような枠組みの別の研究プログラムがフィファーマンの可述的立場のプログラムである。これについて述べる前に，可述的立場とは何かについて思い出しておくとよいだろう。定義されるものがそれ自身の属する集合を用いて定められるとき，**非可述的定義**という。太陽系の惑星全体のように，範囲が明確に定まっている集合がいかなる知的構成にも左右されずに存在しているならば，そのような定義に何の異論もない。ある惑星が他のすべての惑星よりも大きいとすれば,「もっとも大きな惑星」ということが，惑星全体について何らかの言及をしている表現だとしても，その一つの実体を選び出すことができる[12]。しかし集合が知的構成物に依存して存在するなら，そのような集合に言及して要素の１つを選び出そうとしても，可述的立場からすればうまくいかないだろう。例えば，もし整数の集合全体が知的構成物に依存するなら「性質 P をもつ自然数の集合の中で包含関係で最小なもの」で１つの集合を定めることはできないといえよう[13]。これがここでの話題に関連する可述的立場の核心である。実際にどんな条件を課すかはどのような集合を知的構成物として捉えるかによって変わる。ラッセルはどんな集合も知的構成物であると考えていた。ポアンカレとワイルは，クロネッカー[14]に従い，自然数の全体のなす列 $\mathbb{N}$ から集合論的な手段によって得られるものはすべて知的構成物であると考えていたにもかかわ

らず，ℕ 自身は独自に与えられる全体と考えた。この見方はフィファーマンによって取り上げられた。

彼は，ℕ を基本タイプとしてもち非可述的定義を避けた形式的型理論を展開し，ワイル (Weyl) に敬意を表し W と名づけた。これは循環論法原理に配慮している。『プリンキピア・マテマティカ』のもつ構文的な複雑さがないという利点もある[15]。フィファーマンの理論 W は 1 階デデキント–ペアノ算術 (DPA) に証明論的に還元可能であり，実際それの保存的拡大である[16]。したがって，1 階算術 DPA が有限的文に関して信頼できるのだと仮定すれば，W もまたそうである。これに加えて W が 1 階算術 DPA には存在しない循環論法をもたらさないということによって，W が DPA と同じくらいに信頼できるということが非常に強く根拠づけられる。

このことの重要性は，W においてどれくらい解析学が展開できるかということに部分的に依存する。デデキントの連続性公理が『プリンキピア・マテマティカ』の著者たちにとって大きな難問であったことを思い出してほしい。連続性公理は，上に有界な実数の空でない集合は上限 (最小の上界) をもつという主張である。問題は，実数の集合の極大値という概念が非可述的なことである。ワイルのやり方を改めて，フィファーマンはデデキントの連続性公理を，あらゆる上に有界な可算**実数列**には上限があるという原理に置き換えた[17]。実数列の上限という概念は可述的に定義できるので，これは認められる[18]。適当な再形式化によって，フィファーマンは，自然科学に現在応用されているもののほとんどすべてを含む解析学の大部分を W の中で展開できることを発見した。フィファーマンはさらに現代の自然科学にとって絶対必要な数学はすべて W の中で展開できると推測した[19]。

W の中で展開できる広範な数学はまさに有限的文に関して (ただし，これからは「有限的文に関して」というコメントは省略する) 1 階算術 DPA と同じぐらい信頼でき，DPA の正しさと同程度にその結論を合理的に信用できる。それは，我々が有限的算術の正しさに対してもっている信用と比べて良くはないかもしれないが，それでも有意義であり，集合論の正しさに対するよりは信用できるのである。有限の整数の数学である 1 階算術 DPA は，解析学や集合論とは違い，パラドクスによる困難に巻きこまれたことがない。だから，それについて疑う理由などないと思うかもしれない。しかし，可述的立場からすれば事は

それほど簡単ではない。パーソンズは自然数に関する我々の概念は非可述的であると論じている[20]。例えば，次のような定義は明らかに非可述的である。

> 自然数全体のなす集合は，0 を含み後者関数で閉じている集合の中で包含関係に関して最小のものである。

自然数全体のなす集合の簡単に思いつく別の定義もそれほど良くはならない。可述的立場では，自然数全体の構造はあらかじめ与えられたものとすることはできないということだろうか。だとすると，DPA は可述的立場の者からすればまったく信用がおけない。これに答えて，フィファーマンとヘルマンは有限集合の可述的な二階理論とともにデデキントの有限集合の考えを用いて (これには自然数の概念がいらない)，DPA が可述的に正当化されることを示した[21]。これらをもとにして，彼らは 3 つのことを示した。(1) N 構造，つまり後者関数によって順序づけられた自然数構造，の可述的に適切な定義があること。(2) (1) のような構造が存在すること。(3) 任意の 2 つの N 構造は互いに同型であること。しかも，用いられた可述的体系は 1 階算術 DPA を含んでいる。(その保存的拡大でもある。)　このような裏打ちのもと，可述的立場では，1 階算術 DPA に相対化された W の信頼性を確固な根拠とみなすことで，W を絶対的に信頼できるものと捉えることができる。

結　　論

我々は，WKL_0 の信頼性を合理的に確証できるし，フィファーマンの W も信頼できることを合理的に信じられる。だから，古典的数学の大部分の信頼性に関するある高度の信用が，証明論的還元性によってすでに正当化されている。このことは，集合論，ゆえに解析全体の信頼可能性を合理的に確かめられることを立証するはずだったヒルベルトの目標には達していない[22]。しかし，確かさを求めることにどれだけ成功しているかという度合いを過小評価するべきではないし，この方向で達成されうる限界に到達したと考える理由はない[23]。

集合論の信頼性についての確実性は保証されていない。けれども，集合論，したがって古典的解析学の信頼性に対するある程度の信用は保証される。普通の集合論の信頼性と無矛盾性は等しい。集合論の無矛盾性が信用できる理由の一

つは，その理論のモデルについて明確な概念をもっていることである。すなわち，集合論の公理が部分的かもしれないが明瞭に表している累積的階層としての集合のユニバースがある。二つめの理由は，数十年に及ぶ集合論の研究において，矛盾がみつかっていないということである。もちろん，矛盾が将来にわたって見いだされないと考える合理的な根拠はない。我々の信念は合理的ではあるが，取り消せないものではない。これはそれほど悪いことであろうか。いま固く信じていることが後で間違っているとわかるかもしれないと認めなければならないことは，納得しづらく不安ですらある。逆に，我々の根本的な信念は論破不能であると信じることはなぐさめになるだろう。ラッセルは次のように告白している。「私は人々が宗教的な信仰を欲するように確信性を欲した。」[24]

この絶対確実主義者の確実性への願望は根深い。それは，過去のショックへの自然な反応であるけれども，過剰反応である。もし矛盾を見いだしたとしても，我々は，それに付随した概念をよりいっそう洗練させることに努め，いっそう明確で適切な何かを選ぶだろう。そして，それでもまだ，使える数学の多くを含んだまま理論を狭めることは可能であろう。

したがって，収支合計は黒字である。我々は，古典的数学**全体**の信頼性を**確証**できない。しかし，その主要な部分の信頼性は確証できるし，全体の信頼性を信じることもできるのである。

4 展　望

非有限的な数学の認識論における位置づけが本書の中心的な関心事である。しかし，主要な事柄ではあったけれども，認識論が基礎づけに関する研究の唯一の関心事だというわけではない。数学の特質や本質的な系統もまた主な関心事である。その後の数学の発展によって，集合論がこの種の問いかけに答える唯一の基盤でないことがわかった。もちろん，真の数学は構成的でなければばならないと考える人たちは，古典集合論だけではなくそれが育まれた19世紀の数学さえも拒絶するだろう。この点に関しては，構成的解析学の発展が，代替物となる基礎づけに関する研究プログラムの部分的な実現とみなせよう[1]。筆者には，このプログラムの成功やその有効性について評価することができないし，どちらにせよその判断を下すのはおそらく早急である。古典的数学を受け入れる人にとって，その広大な守備範囲のために集合論の代わりとして圏論が提供された。数学は確かに単なる論理でも高階の論理でも集合論でもない。他のすべてが還元されるようなただ一つの基礎理論というようなかつてイメージはなくなった。もし純粋数学が抽象的な構造の研究であるなら，集合論は，その主題について考えるための多くの枠組みの一つにすぎず，最良のものでもないかもしれない。集合のユニバースはそれ自身が構造であり，トポス理論が示すように，より一般的な何かの具体例かもしれない。それに加えて，トポス理論は数学の本質的な系統に関して新しい光を投げかけ，トポロジーや代数幾何学の一方でロジックや集合論といった，みたところでは異なった分野の間の驚くべき統一性を明らかにしている[2]。

基礎づけに関する研究は最初，連続体や無限小解析の基礎に関する我々の理解を明確にする必要から推し進められた。(解析学の古典的教科書の中で使われているような) 標準的な集合論の議論は十分役だつ説明である[3]。しかし，現在では基本的な直観に関する別の説明がある。ロビンソンの超準解析は無限小を

復権した[4]。非古典的議論には直観主義的解析学やビショップの構成的解析学も含まれる。また，総合微分幾何の発展は，連続体や，無限小に関する新しい理論に関する別の見方を今もなお与えている[5]。このように現在では元来の空間的な直観を洗練し抽象化する数学的方法もある。基礎づけに関する研究はこうして単一的な見解から離れて広がっていった。

数学における新しい発展が我々の数学の特質と本質的な系統に関する理解を深めるとするなら，認識論上の進展は外部の発展によりもたらされそうである。本書で扱った段階において，認識論上の中心的な関心事は数学の主要部を正当化することだった。それとは別に，どのようにして個人が数学的な知識を得，理解することができるのかを説明するという関心がある。この問いに答えるには我々が数学的な信念や能力をいかにして実際に獲得するかについてきめ細かく知る必要があり，それにより，このような認知の発達の様子を評価する最良の方法を認識論的に研究することができる。経験的なデータは，主に認知科学からもたらされるに違いない。さまざまな出所の証拠を新たにまとめると，単純な数的能力に関する研究はすでに実り多いものであるといえそうである。(健康な成人，子供に対する実験がある。幼児のさえもある。また，脳障害患者の臨床試験，脳画像処理研究，動物研究があげられる[6]。)　しかし，まだまだ先は長い。数学の歴史はもう 1 つの情報源である。これについては，公表するために議論や成果を洗練しまとめる以前の，発見前後の混沌とした初期段階の情報を欠いている。残念ながら，我々はみな乱雑ななぐり書きや粗い図表を捨ててしまいがちである。これを読んでいるすべての数学者にお願いがある。どうかあなたのメモを取っておいてそして提出してほしい。それらは，少なくとも数学についての認識論研究者にとって，ルビーよりいっそう貴重なものである。おそらく数学者は無計画で組織的でない研究が少し恥ずかしいのである。しかし，この感情はふさわしいものではない。実り多い研究というのはそのようなものにちがいない。発見に至る定まった道筋などないのである。それは基礎づけに関する研究からの教訓の一つである。

エンドノート

第 I 部

第 1 章

1. Kline (1972: 252) で言及されている。

2. Mancosu (1996: ch.6) でライプニッツの微積分学に関する 17 世紀の批判について調べられている。これらは，バークレーのかなり有名な批判 (Berkeley 1734) より数十年遡る。Bos (1974) を参照。

3. Kline (1980: 138–9) で引用されている。

4. Kline (1972: 466). 発散する級数にもあてはまり，和とよばれている概念がいくつか存在する (Kline 1972: ch.47)。

5. その展開は，$1/(1+x)$ を $(1+x)^{-1}$ と表現し，負の整数の指数に対する二項定理を適用することによりみつけられる。

6. ベキ級数は，n 番目の項が $a_n(x-x_0)^n$ という形の級数である。ただし，x_0 は級数におけるすべての項で同じであるが，係数 a_n は異なってもよい。

7. ライプニッツは，$\pi/4 = \int_0^1 1/[1+x^2]dx$ であることを示した。その被積分関数をベキ級数に展開することにより，彼は，$1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ を得た。このとき，項別に積分して，その結果の中の x に 1 を代入することにより，$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$ が得られる (Kitcher 1984: ch.10 を参照)。

8. l を弦の長さ，$0 < x < l$，t を経過時間とするとき，ダニエル・ベルヌーイは，すべての解が $y(t,x) = \sum_n^\infty a_n \sin(n\pi x/l) \cdot \cos(n\pi ct/l)$ という形であることを主張した (Kline 1972: ch.22 を参照)。

9. Kline (1972, 1980) と Kitcher (1984) で引用されているものから抜粋したこれらの手紙は，1826 年に書かれた (Abel 1881: ii. 263–5 と ii. 267)。

10. Kline (1980) によると，そのような議論は，1806 年にアンペールにより，1875 年にバートランドにより，そして，3 巻からなる *Traité du calcul différential et du calcul intégral* (1810–19) の第 2 版においてラクロアにより与えられた。

11. 平行線公準は，任意の直線 L と L 上にない任意の点 p に対し，L と p を含む平面において，L と平行なただ一つの直線が p を通るというものである。1829 年まで

に，ガウス，ロバチェフスキー，ボヤイが“双曲幾何学”として知られる非ユークリッド幾何学を独立に発見した。これは，ユークリッドの平行線公準を，任意の直線 L と L 上にない任意の点 p に対し，L と p を含む平面において，L と平行な少なくとも 2 つの直線が p を通るという公準に置き換えることによる結果である。ガウスは，ベッセルへの手紙において，空間の幾何学は“先験的に”確立されえないという彼の意見を明確にした。これらの手紙の該当する部分は，Ewald (1996) で翻訳されている。幾何学における信頼性の喪失に関する他の要因は，ユークリッドの説明の不備の発見であった“かもしれない”。

12. ボルツァーノの例は，1834 年の彼の未発表の研究の中でみつけられた。かなり遅くまで発表されなかったが，1860 年，セルリェは他の例を与えた。ワイエルシュトラスは，1872 年に他の例を与え，1875 年に発表した (Kline 1972: ch.40, §3 を参照)。そのような直観に反した発見に対する数学者の反応については，Hahn (1933) を参照せよ。

13. Peano (1890) と Hilbert (1891). 空間を埋める曲線についての一世紀の詳しい歴史と数学的な証明については，Sagan (1994) のすばらしい本を参照せよ。

14. ここでの「実数」は，連続な数直線上の点と対応し，無限小数により表される数である (じつは，極限のこの定義は，例えば複素数や，より一般に距離空間の点など非常に広く応用できる)。

15. この定義は，より一般に，距離空間の部分集合で定義され，距離空間に値をもつ関数に適用されうる。例は，以前に述べた空間を埋める曲線である。それは，閉単位区間 (0 と 1 を含み，その間の実数の集合) で定義され，その値は，閉単位正方形におけるすべての点 $\langle x, y\rangle$ である。すなわち，$0 \le x, y \le 1$ であり，$\langle x_1, y_1\rangle$ と $\langle x_2, y_2\rangle$ の間に，$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ で定義された距離をもつ空間におけるすべての点に値をもつ。

16. 自然数は負でない整数である。

17. 入手できるカントルの誤りに関する説明は，Kitcher (1984: ch.10) にある。

18. なぜ，各点収束と一様収束の違いが問題になるのであろうか。一様収束は，もし，連続関数の列が一様にある関数に収束するならば，その関数もまた連続であるという意味において，連続性を保存する。これは，各点収束に対する利点である。なぜなら，各点収束するが，不連続な関数に収束する連続関数の列が存在するからである。一様収束には他の利点もある。

19. 一つの例は，0 と 2π の間の x に対する関数 $\sin(1/x)$ である。この点に関する議論については，Giaquinto (1994) を参照せよ。

第 2 章

1. “背理法”による標準的な議論を示す。$\sqrt{2}$ が整数の組の比であり，$\sqrt{2} = h/k$ とする。このとき，h/k において，1 より大きいすべての共通因数で約分することができ

る。その結果を p/q とする。したがって，$\sqrt{2} = p/q$，ただし p と q は共通因数をもたない。$\sqrt{2} = p/q$ なので $2 = (p/q)^2 = p^2/q^2$ であり，$p^2 = 2q^2$ となる。したがって，p^2 は偶数である。しかし奇数の 2 乗は奇数である：$(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1$，それゆえ，p は偶数である。$p = 2m$ とする。しかし $p^2 = 2q^2$ なので，$4m^2 = 2q^2$ であり，$2m^2 = q^2$ となる。したがって，q^2 は偶数である。それゆえ，q は偶数である。$q = 2n$ とする。p と q は共通因数として 2 をもち，p と q の選び方に矛盾する。それゆえ，$\sqrt{2}$ は整数の組の比ではない。

2. (#) を示せば十分である。

(#) 任意の正の整数 p と q に対し，p/q が整数でなければ，$(p/q)^2$ も整数でない。

なぜなら，(#) は，任意の正の整数 n, p, q に対し，$n = (p/q)^2$ であれば，p/q が整数であることを導く。したがって，ある正の整数 p と q に対し，$\sqrt{n} = p/q$ であれば，$\sqrt{n}$ は整数になる。したがって，$\sqrt{n}$ が整数でなければ，それは無理数である。

(#) の証明を示す。上の注のように，p と q は共通因数をもたないとする。$q = 1$ であれば，p/q は整数である。したがって，$q > 1$ と仮定する。1 より大きいすべての整数は，唯一の素因数分解をもつ。したがって，p^2 は p と同じ素因数をもつが，それぞれは 2 回現れる。同様に，q^2 は q と同じ素因数をもち，それぞれは 2 回現れる。したがって，p^2 と q^2 は共通の素因数をもたない。そうでなければ，p と q は共通の素因数をもってしまう。明らかに，2 つの数が共通の素因数をもつのは，それらが共通因数をもつとき，かつそのときに限る。それゆえ，p^2 と q^2 は共通因数をもたない。それゆえ，ある整数 n が存在して，$p^2 = n \cdot k$ かつ $q^2 = 1 \cdot k$ となる k は存在しない。それゆえ，任意の n に対し，$p^2/q^2 \neq n$ である。

3. 実数 x が実数のクラス C の“上界”であるとは，C の任意の要素 c に対し，$c \leq x$ となることである。x が C の“最小上界”(または“上限”) であるとは，C の任意の上界 y に対し，$x \leq y$ となることである。

4. カントルの定義は 1872 年に発表された。基本列の間の関係に対するカントルの考え方は，筆者が示したほど単純ではなかった。Dauben (1979:37–40) を参照。

5. デデキントの定義は，Dedekind (1872) で与えられる。その序文でデデキントは，彼の定義が 1858 年にすでにもっていた考えに由来すると述べている。

6. Rubin (1964) は，切断を簡潔にではあるが完全に扱っている。彼は，切断をその下のクラスと同一視していることに注意せよ。

7. この章の補遺は，これが意味することを説明している。

8. $\{s_n\}$ は，順序対 $\langle k, s_k \rangle$ のクラスにより表現される。

9. カントルの考え方については Dauben (1979: 37–40) を参照せよ。デデキントの考え方については Kline (1972: 986) を参照せよ。

10. Dauben (1979: ch.2) を参照。

11. 条件 φ を満たす x のクラスに対し，$\{x : \varphi(x)\}$ という表記を使う。区間 $(c, d) =$

$\{x : c < x < d\}$ は開である。区間 $[c, d] = \{x : c \leq x \leq d\}$ は閉である。

12. カントルは，第 2 種のクラスの多くが，1879 年に彼が定義した重要な性質をもつことを発見した。C が "X においていたるところ稠密" であるとは，X の任意の点が，C の点でなければ，C の極限点となることである。これは，X のすべての点の近傍が，C の無限個の点を含むことを意味する。C が X よりも疎だとしても，これは起こりうる。例えば，有理数のクラスは実数のクラスにおいていたるところ稠密である。カントルは，与えられた区間においていたるところ稠密である第 2 種のクラスを数多く発見した。明らかな質問は，与えられた区間の部分クラスである第 2 種のすべてのクラスは，その区間においていたるところ稠密であるかどうかということである。もしそうであれば，第 2 種のクラスは，連続体の本質を説明する鍵となるかもしれない。しかし，1880 年までに，カントルは，その一般化が誤りであることを発見した。しかしながら，点クラスの理論に関する一連の論文において (1879–84)，彼は，超限の分類を含む多くの肯定的な定理を発表した。Dauben (1979: ch.4 と ch.5) を参照。

13. クラス C 上の関係 $<$ が C の "狭義線形順序" であるとは，(i) C の任意の要素 x, y に対し，$x < y$, $x = y$, $y < x$ のどれか一つだけが成り立ち (三分律)，(ii) C の任意の要素 x, y, z に対し，$x < y$ かつ $y < z$ であれば，$x < z$ が成り立つ (推移律) ことである。

14. D が C の空でない部分クラスであるとき，x が D において $<$–最小であるとは，D の任意の要素 y に対し，$x \leq y$ となることである。

15. Cantor (1883, 1897).

16. Cantor (1883). 順序数と基数を修飾する場合，筆者は無限と超限を同じ意味で使う。

17. 1873 年の手紙において。

18. これに関するカントルの最初の証明は，1874 年に発表された。ここで与えた証明は，Cantor (1895) に現れる。

19. これは，1844 年にリウビルにより示された。

20. 「数え上げられる」の代わりに,「可付番」または「可算」と書く人もいる。

21. カントルは，1874 年の論文において，有理数と代数的数が数え上げられるという証明を与えた。同じ論文で，彼は，$\mathbb{R}$ が数え上げられないことの証明を与えた。ここで与えた証明は，1891 年に発表されたカントルの論文のものである。

22. すべてのクラスが整列に順序づけられるならば，この「よりも小さい」という関係は，狭義線形順序であることが証明される。

23. 順序数と基数に適用する場合，筆者は無限と超限を同じ意味で使う。少なくとも 2 つの無限の数が存在するという結論は，実点のクラスが基数をもつということを否定することにより，抵抗されうる。

24. Dedekind (1887) におけるデデキントへの手紙。

25. 注 21 で言及された 1891 年の論文において示されている。

26. 順序数がその前者のクラスと同一視され，$|x|$ が x の濃度を表すとすると，より簡潔な定義は次のようになる：$\aleph_0 = |\omega|$，$\aleph_{\alpha+1} = |\{\beta : |\beta| = \aleph_\alpha\}|$．$\lambda$ が極限順序数であれば，$\aleph_\lambda = |\{\beta :$ ある $\alpha < \lambda$ に対し，$|\beta| = \aleph_\alpha\}|$．

27. その会議でヒルベルトは 10 の問題だけを示したが，彼の講義の発行された文書には，完全なリストが与えられている (Hilbert 1900*b*)。ヒルベルトの序文と連続体問題の彼の説明は，Ewald (1996: Vol.2) で翻訳されている。

28. Dauben (1979: ch.12) の「個性，心理，そして憂鬱」という節で，クロネッカーの反対により，カントルがどれほど強く影響されたかが説明されている。

29. クロネッカーが実際にこのように言ったという証拠について，ジェレミー・グレイは，ウェーバーが，*Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 2 (1893): 5–31 の中で書いた以下のようなクロネッカーの死亡記事しかないといっている。「1886 年のベルリンで開かれた自然科学者の会議における彼の次のような発言を思い出すだろう。『親愛なる神が整数をつくった。それ以外のものはすべて人間の仕事である。』」また，クロネッカーとの議論を通して彼の意見に詳しいヒルベルトは，Hilbert (1920) でクロネッカーの見解を紹介する中で，この言葉を引用している。カントルの研究に対するクロネッカーの抵抗については，Dauben (1979: ch.3) の中の「レオポルド・クロネッカー (1823–1891)，カントルの研究に対する初期の抵抗」の節を参照せよ。

30. Dedekind (1888).

31. デデキントのいくつかの意見は，実数の定義に関する彼の関心が，単に規則と組織化に関する関心であることを示唆している。例えば，Dedekind (1872) の第 6 部の中の主張である $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ という命題は証明されていない。しかしながら，デデキントの意見は，疑う余地のない幾何的な証明の排除であるとして捉えられうるとジェレミー・グレイは筆者に指摘した (正方形 S の対角線の 2 乗は，S の面積の 2 倍である。よって，一辺が 1 の正方形は対角線の長さが $\sqrt{2}$ であり，一般の長さが $\sqrt{3}$ の対角線の長さは $\sqrt{6}$ である。したがって，$\sqrt{2}$ と 1 の比は，$\sqrt{6}$ と $\sqrt{3}$ の比と同じあり，それゆえ，$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ の比は，$\sqrt{6}$ と $\sqrt{3}$ の比と同じになる。よって，$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$ となる)。

32. Cantor (1895, 1897) の中のクラスの一般理論は，はるかに広範囲であった。

33. クラス K は“s について閉じている”とは，K の任意の要素 x に対し，$s(x)$ は K の要素となることである。

34. これは，(要素の上を動く量化詞と要素のクラスの上を動く量化詞をもつ) 2 階の帰納法である。同じ名称でよばれている 1 階の帰納法がある。デデキント–ペアノ算術には，使われている帰納法の種類によって，1 階のものと 2 階のものがある。

35. この同型定理は，1 階のデデキント–ペアノ算術に対しては成り立たない。

36. Dedekind (1888: §73)．実際，彼は，すべての単純無限体系が同型であることを §§132, 133 まで示さなかった。

37. Cantor (1895: §7).

38. §§135, 137. デデキントは，0 を使った等式の代わりに，$m+1=\mathrm{s}(m)$ と $m\times 1=m$ を使った。§155 では，ベキ乗を定義している。

39. フレーゲが述べた考え方は，数 n はちょうど n 個の要素をもつ外延をもつ“概念”のクラスであるということである。フレーゲの考え方において，概念とは述語が意味するものであり，述語とは文から 1 つまたは複数の名辞が取り除かれたものである。概念の“外延”とはその概念を表す述語を満足するもののクラスである。しかしながら，フレーゲによると，概念は外延的である。すなわち，それらのどの 2 つも同じ外延をもたない。クラスは完全な表現の参照であるが，概念は不完全な表現の参照であることによってのみクラスと区別される。よって，フレーゲの概念は，我々が概念という用語を使うときに通常念頭においているものではない。フレーゲの区別を見落とし，彼の概念をクラスとして扱うならば，我々の目的に対して，それは単純になり誤解を招くおそれは少なくなるだろう。この点の詳細と実証については，Frege (1964) へのファースの優れた手引きを参照せよ。

40. 形式的な定義は，Frege (1893) §§41–6 のフレーゲの記号主義の中で与えられている。その定義を理解するためには，前節をみる必要があるだろう。非形式的な定義は，Frege (1884) の §§72–83 にある。

41. 我々が注目したフレーゲの努力は，哲学的な動機づけをもっているという点で異例である。

第 II 部

第 1 章

1. ここでは，クワインのパラドクスの方向性 (Quine 1962) に従う。そこで，彼は，この本で扱われるパラドクスのいくつかに関する簡単な考察を与えている。

2. 一つの議論を示す。$a=b$ とする。このとき，(i) $a^2=ab$ なので，$a^2-b^2=ab-b^2$ となる。それゆえ，$(a+b)(a-b)=b(a-b)$ となるので，(iii) $a+b=b$ となる。よって，(iv) $a+a=a$ となるので，$2a=a$ となる。それゆえ，$2=1$ となる。誤りは，ステップ (iii) にある。そこでは，両辺を $a-b$，すなわち 0 で割っている。

3. Cantor (1895), Burali-Forti (1897). 彼らは，“背理法”により，(異なる) 結論に達するために矛盾した議論を使った。パラドクスとして受け入れることについては，Moore and Garciadiego (1981) を参照せよ。

4. カントルは，1899 年 8 月 31 日付けのデデキントへの手紙 (Dauben 1979: p.242, n.7) の中で，すべてのクラスのクラスが存在しないことを示すためにその議論を使った。

5. Cantor (1891).

6. Rang and Thomas (1981) を参照。
7. Grattan-Guinness (1978) を参照。

第 2 章

1. 簡潔な説明については，第 I 部 第 2 章の順序数と基数の節を参照せよ。
2. Cantor (1887–8). Hallett (1984: 41) の中で，関連部分の訳が与えられている。
3. Cantor (1883).
4. Cantor (1899).
5. Hallett (1984: 165–6) を参照。さらに，絶対者 (Absolute) については，(1984: 39–48).
6. 任意の無限集合の濃度があるアレフであることを示すために，カントルは，デデキントへの手紙の中で，この判定条件を使っている (Cantor 1899)。
7. これらは次のようなものである。(1) どの AIM も基数をもたない。(2) 2 つのクラスの間に 1 対 1 の関連づけが存在すれば，両方とも集合であるか，両方とも AIM である。(3) 1 つの集合の任意の部分クラスはまた集合である。
8. 以下の第 VI 部の第 1 章で，集合の累積的階層の考え方について説明する。
9. その論理学者は，P. ジュールダンであった。この批判がジュールダンにとって公平であるかどうかわからない。
10. Russell (1906*a*: Russell (1973) の中の 153).
11. X から Y への単射とは，X と Y の部分クラスの 1 対 1 の関連づけである。
12. X から Y への単射が存在し，Y から X への単射が存在するならば，一方から他方への全単射が存在するという定理である。
13. すべての集合のクラスが AIM であることをみるために，順序数のクラスとすべての集合のクラスの部分クラスの間の以下のような全単射を f とする。任意の順序数 α に対し，$f(\alpha) =$「α より前にある順序数のクラス」。クラス C が AIM であるとは，すべての順序数のクラスと C またはその部分クラスの 1 つとの間に全単射が存在するときである，というカントルの判定条件を使うことにより，すべての集合のクラスが AIM であることが従う (同じ理由により，すべてのクラスのクラスが AIM であることも従う)。
14. カントルの定理は，U のすべての部分 “ 集合 ” のクラスの存在と矛盾しない。なぜなら，U のいくつかの部分クラスは集合ではなく，それゆえ，U の部分集合ではないからである。特に，c が集合から集合のクラスへの 1 対 1 写像ならば，クラス $\{x : x \in \mathrm{U} \,\&\, x \notin c(x)\}$ は集合となる必要はない。
15. 各順序数 α に対し，α より前にある順序数の集合はそれ自身の要素ではない。したがって，注 13 で定義された f は，順序数のクラスと自分自身を要素としないもののクラスの部分クラスの間の全単射である。それゆえ，そのクラスは AIM である。
16. これについての議論は，前の注で与えられている。

17. Hessenberg (1906), Hallett (1984: 168) で引用されている。
18. 数学者トーメは以下のように結論づけている。「数学はすべての科学の中でもっとも明確でない。」(Thomae 1906, Dauben 1979: 351 の中で引用されている。) 他の科学は明らかに数学に依存しているので，もちろんこれは誇張表現であった，しかし，その見解は概してパラドクスの認識の後に続いた不確実性を示唆する。

第 3 章

1. Frege (1893: §0).
2. Frege (1884: §14).
3. 例えば，順序に関するヒルベルトの第一公理を考えよう。これは次のようなものである。点 b が点 a と点 c の間にあるとき，3 点は同一直線上にあり，点 b は点 c と点 a の間にある。
4. 1885 年のフレーゲの講義「算術の形式理論について」からである。Dummet (1991) の中で引用されている。
5. Frege (1903: §147).
6. フレーゲの文章の中で，概念とは筆者が条件とよぶものである。対象が概念に分類されるということは，それが条件を満たすということである。
7. Frege (1893: §3).
8. Frege (1893: §9).
9. Frege (1893: §20). 基本法則 V は筆者が提示したものよりもわずかに一般的であることをマイケル・ポッターは指摘している。なぜならそれは，入力に対する値が真理値であるような関数である概念に対してだけでなく，任意の関数 F と G に適用されているからである。
10. Frege (1893: introduction).
11. ibid.
12. Frege (1879) は必要とされる性質をもつ言語，すなわち「概念記法 (Begriffschrift)」を与えるための最初の試みであった。改良版は，Frege (1893) の第 1 部の中で定められている。
13. Frege (1893: introduction).
14. Frege (1893: §34).
15. その議論は次のようなものである。(1) $\forall x[\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \mathrm{F}(x)]$ (論理的真実)。(2) $\{x : \mathrm{F}(x)\} = \{x : \mathrm{F}(x)\}$ ((1) と (Va) から)。(3) $\exists z[z = \{x : \mathrm{F}(x)\}]$ (存在汎化により (2) から)。
16. 一般的な論理式から矛盾を導く議論は，Frege (1903) の補遺の中で与えられている。
17. その導出は，Frege (1903) の補遺の中で与えられている。
18. 普遍例化は，$\forall x\mathrm{F}(x)$ ゆえに F(c) という形の推論を認める規則である。存在汎化は，F(c) ゆえに $\exists x\mathrm{F}(x)$ という規則である。どちらの場合においても，c は固有名詞や

確定記述のような単称名辞である。

19. Frege (1903: appendix). この選択をフレーゲが嫌ったもう 1 つの理由は，いくつかの関数が部分的にしか定義されないことを認めることに気が進まなかったからかもしれない。最初のレベルの概念は，対象に適用可能な概念である。最初のレベルの概念 $\Gamma(x)$ からその外延 $\{x:\Gamma(x)\}$ への関数としてクラスの抽象化を扱うと，この選択は，クラスの抽象化が部分的に定義された関数であることを必要とする。「我々は外延をもたない概念が存在する可能性を考慮しなければならない。いずれにしても，語の一般的な意味の中で外延のない概念が存在する可能性を考慮しなければならない。このことにより，第 2 番目のレベルの関数 $\{x:\Gamma(x)\}$ の正当性はゆるがされる。さらに，そのような関数は，算術の基礎をおくために不可欠である。」

20. ibid.『基本法則』(Frege 1893) の第 1 巻の序文の中で，フレーゲは次のように書いている。「私の理解する限りでは，値域 (courses–of–values) に関する私の基本法則 (V) についてのみ論争が起きうる。この法則は，これまでの論理学者は明示的に扱ってこなかったが，人々が概念の外延について話しているような場合に，念頭においているものである。私はそれが純粋な論理の法則であると考える。どのような場合でも，(論理法則であることの) 判断が必要なところでは，それが指摘されている。」

21. Resnik (1980) はこの点が正しいことを主張する。

22. Sobocinski (1949) によると，レスニェウスキーがこれを示した。Resnik (1980: 215–9) もまた，これを示している。

23. Dummett (1991: 6–7) と Parsons (1976) を参照せよ。Resnik (1980) は Frege (1969: 295–302) を引用している。

第 4 章

1. 述語 $\mathrm{F}(x)$ により表現される概念の外延は，F であるという条件を満足するもののクラス $\{x:\mathrm{F}(x)\}$ である。

2. 空のクラスを $\emptyset$ とおくと，$\emptyset\notin\emptyset$ である。したがって，$\emptyset\in\{x:x\notin x\}$ となる。それゆえ，$\exists y[y=\{x:x\notin x\}]$ となる。

3. ここでは，変数は，開放文の中の空所に印を付けていると仮定している。これは，前におかれた量化詞により束縛された変数ではなく，自由変数であることを意味している。「任意の人間 x に対し，x は y より背が高くない」という開放文において，変数 x は束縛されており，変数 y は自由である。

4. Russell (1903: app.B).

5. n 変数関係の外延の型は，適切な順序で関係項の型を記憶しておく必要があるので，わずかに複雑になる。このことを行う明らかな方法は，関係項の型が順に $\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_n$ となっている n 変数関係の型は，列 $\langle\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_n\rangle$ と定めることである。k 変数述語 $\mathrm{F}(x^1,\ldots,x^k)$ の変数が，それぞれ，型 $\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_k$ をもつとする。構文規則は次のようである。各 x^i は型 t_i の任意の項に置き換えられるが，それ以外には置き換えら

れない。意味の規則は次のようである。$F(x^1,\ldots,x^k)$ により表現される条件は，それぞれ，型 $t_1,\ldots,t_k$ をもつ対象の列については真または偽であるが，他の列については真でも偽でもない。

6. その議論は次のようなものである。C を型 $n+1$ のクラスとする。このとき，(a) ある条件 $F(x_n)$ に対し，$C = \{x_n : F(x_n)\}$ となる。したがって，$e \in C \leftrightarrow e \in \{x_n : F(x_n)\}$ となる。さらに，(b) $e \in \{x_n : F(x_n)\} \leftrightarrow F(e)$ となる。したがって，$e \in C \leftrightarrow F(e)$ となる。したがって，$e \in C$ が真の値をもつとき，かつそのときに限り $F(e)$ は真の値をもつ。しかし，型 n の項だけが $F(x_n)$ の中の変数を置き換えられるので，$F(e)$ が真の値をもつのは，e が型 n をもつとき，かつそのときに限る。したがって，$e \in C$ が真の値をもつのは，e が型 n をもつとき，かつそのときに限る。

7. Whitehead Russell (1910–13: introduction の ch.II のはじめ).

8. このことは，型の理論の初期の定式化の中のハイネとフランス人の議論において，ラッセルを悩ませたものの一部であったかもしれない。Russell (1903: app.B).

9. その原理は,『プリンキピア・マテマティカ』の中で，非直接的に表現されている。Whitehead and Russell (1910–13: Part I, §A, p.95).

10. Gödel (1944).

第III部

第1章

1. より正確には，言語 L が意味的に閉じているとは L の意味を L の中で述べることができるということである。L の意味は，Tarski (1932) の意味するところの「L で真である」ことの定義を含むが，ここで必要とされていることは，L での定義可能性の概念が L で表現可能であるということのみである。

2. この文脈における定義表現とは，ちょうど 1 つのものについて真になる記述のことである。例えば「8 の立方根」は「2」を定義し,「トルストイのもっとも長い小説」は『戦争と平和』を定義する。

3. ほとんどの (おそらくはすべて) の安定した自然言語と，典型的な形式言語のすべてについて真であるような，言語についてのある仮定が与えられたとき，ある言語における定義表現の総数は $\aleph_0$，つまり自然数全体の数である。

4. この変種は König (1905) と Dixon (1907) によって発表されているが，それはパラドクスとしてではなく，ツェルメロに支持されたカントル派の主張に反対する議論としてであった。Russell (1908) がこの議論においてパラドクスを見いだした最初のものであったことがわかっている。Garciadiego (1985) を参照。

5. ベリーの変種は 1904 年のラッセルの手紙において与えられている。ここで与えた変種はラッセルが指示したものよりベリーのものに近い。

6. これは第 II 部の第 2 章の「基数」の節において前述されている。

7. このことは「L が高々 $\aleph_0$ 個の表現をもつ」ということと同値である。

8. Richard (1905).

9. Poincaré (1906); Russell (1906*b*).

10. Russell (1906*b*, 1908, 1910). Whitehead and Russell (1910-13: vol.I). ポアンカレの形式化 (Poincaré 1906 §xv) はそれほど良くない。

11. Whitehead and Russell (1910-13: vol.I, introduction, ch.II, §I).

12. Gödel (1947) では，3 つの異なる形式化が 3 つの異なる原理を述べると主張している。Chihara (1973) は，ラッセルの考えていた原理は一つだけであったと示唆している。

13. 束縛された出現は量化詞句の一部か，それに先立つ量化詞句に支配されるかのいずれかである。例えば「ある整数 x について $y = 2x$」という述語では，y の出現は自由である。なぜなら，明らかにそれを 4 で置き換えることができるからである。しかし x の出現は束縛されている。なぜなら，1 番目のほうはそれに続く式のどの変数出現が「ある整数 x について」という量化子に支配されているかを示しており，また 2 番目のほうはこの量化詞句に支配されているので，どちらの x の出現も名前の入る隙間を示してはいないからである。

ラッセルはこれとは異なる用語を用いており，そこでは自由変数は “実の” 変数，束縛変数は “見かけ” の変数とよばれている。

14. 述語「$x > 0$ かつ，ある y について $y = 1/x$」を考える。この述語において，自由変数 x と束縛変数 y の変域がともに有理数のクラスならば，この述語は有理逆数をもつ正有理数の条件を表し，すべての正有理数がこれを満たす。もし x の変域を整数のクラスに変え，y の変域は有理数のままにすると，この述語は有理逆数をもつ正整数の条件を表し，それを満たすのは正整数のみである。最後に，x と y の変域がともに整数のクラスとすると，この述語はさらに違った条件，正逆数をもつ正整数の条件を表し，それを満たすのは 1 のみである。つまり，述語が表す条件は自由・束縛変数の変域に影響を受けやすい。

15. 基礎となる言語が数論の言語であるとすると，隠されている変数は 2 つである。基礎となる言語が『プリンキピア・マテマティカ』のものなら，「x は変数である」は定義された述語であり，よって 2 つより多くの変数が隠されていることになる。

16. 『プリンキピア・マテマティカ』の記法では，ラムダを前置する代わりに変数にアクセント記号を付けている。つまり，λx[x は整数である] は [$\hat{x}$ は整数である] となる。今日ではラムダ記法のほうがより一般的である。

17. Russell (1908): Whitehead and Russell (1910-13: vol.I, Introduction, ch.II. §I).

18. クラス y が x を**包含**するとは，x が y の部分クラスであるときをいい，x を**含有**するとは x が y のメンバーであるときをいう。

19. 実際には，関係 “$\leq$” は整列順序である必要はない。これはある要素が他のすべて

に先立つような部分順序であれば十分である。

20. この原理は，意味的に閉じた言語 L におけるどんな述語 F(x) についても，すべての対象 y に対して $y \in \{x : \mathrm{F}(x)\} \leftrightarrow \mathrm{F}(y)$ となるようなクラス $\{x : \mathrm{F}(x)\}$ が存在するというものである。

21. Chihara (1973) は，カントルのパラドクスが仮定的な定義の形をしており，その言及先が束縛変数の変域に入っていることを示している。

22. この仕掛けはフォン・ノイマンによるものである。クラス x は ∈–関係によって整列順序となり，すべてのメンバーがその部分クラスになっているとき，順序数であると定義される。これから，順序数はそれより前の順序数全体のクラスと一致することが導かれる。集合とそれ以外のクラスを区別するという文脈においては，この定義は集合のみに適用されるべきものである。しかしそのような区別がなされなければ，この一致によってすべての順序数のクラスがあるとすれば，それ自身も順序数であることが保証される。

23. これはラッセルが別の目的のために発明した例を改めたものである。

24. 自分自身について真でない，という条件は，自分自身について真である条件かどうかを考えるとこれと同じパラドクスが得られる。これは第 III 部の第 4 章で述べられる真理パラドクスのうちの一つである。

25. Goldfarb (1989) を参照。

26. このように結論づけることにおいて，複合的なものはその構成要素に構成要素として依存しているということを仮定しており,「によって定義される」ということの以前に与えた変数の範囲を本質的であるとみなす解釈を使っている。

27. $z \in^1 y \leftrightarrow z \in y$ かつ $z \in^{n+1} y \leftrightarrow \exists w[z \in w \,\&\, w \in^n y]$ と定義する。このとき，ある正整数 n に対して $x \in^n c$ となるとき，かつそのときに限り x は c の要素たちの構成する木の要素となる。集合の要素たちの構成する木は**推移的閉包**としても知られている。構成木を根の体系のように下方へのびていくように視覚化すると，x が y より下にあるのは，ある正整数 n に対して $x \in^n y$ となるときである。

28. カントル集合は次のようにして得られる。I_1 を区間 $[0,1]$ から中間の $\frac{1}{3}$ の開区間を除いた残りの閉区間のクラス $\{[0,\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},1]\}$ とし，I_{n+1} は I_n の要素であるすべての開区間から中間の $\frac{1}{3}$ の開区間を除いた残りの区間とする。いま，E_n を I_n の要素の和，つまり $[0,\frac{1}{3^n}]\cup[\frac{2}{3^n},\frac{3}{3^n}]\cup\cdots\cup[\frac{(3^n-1)}{3^n},1]$ とする。このとき，カントル集合は集合 E_n すべての共通部分である。これは $\{x : \exists a \forall n[a_n = 0$ または $2 \,\&\, x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}]\}$ と定義できる。この集合は非可算無限であるが，測度 0 であることで注目に値する。

29. これは正則性公理 (すべての空でない集合 x は x と共通要素をもたないような y を要素としてもつ) によっても保証される。c が自分自身の構成木に現れるならば，c から (構成木に) 含まれている c までの枝に現れる要素のクラスはこの公理の反例となる。しかしながら，ラッセルがパラドクスについての仕事をしていた 1910 年代にこの公理に気づく者はおらず，型理論の文脈においてもそのような公理は必要とさ

れなかった。

30. 現代的な意味での数学的な関数は外延的である。というのも，それらは入力 (引数) が同じでそれぞれの入力に対する出力 (値) が同じであるとき同じものであるとみなされ，それがどのように定義されるかにはよらない。数学的関数は入力–出力の順序対のクラスと同一視される。

31. Whitehead and Russell (1910-13: vol.I. p.65).

32. ibid. p.75

33. ホワイトヘッドとラッセルが『プリンキピア・マテマティカ』の共著者となっているが，その論理の土台にある哲学はラッセルに負っている。『プリンキピア・マテマティカ』の哲学的な題材についてはラッセルのみによってそれ以前に論文として出版されている。Russell (1948) は，ホワイトヘッドの貢献が顕著でないという考えに反論している。

第 2 章

1. Whitehead and Russell (1910-13: Preface と Introduction).

2. Russell (1911).

3. ラッセルによれば，命題関数はその値すべてを前提としており，それらが命題である。**PM** の領域がその中のものが前提とするすべてを含むなら，それは命題を含まなければならない。

4. 厳密にいえば,「外延のクラスまたは関係」というべきである。数学的対象には 2 変数以上の述語の外延として提示されるものがある。今日ではこれらは $n > 1$ に対して，順序 n 対を要素とするクラスとして扱われる。ホワイトヘッドとラッセルはこれらを**外延の関係** (あるいは単に**関係**) とよび，クラスと異なるものとして扱った。しかしその違いはたいしたものではない。つまり，n 値関係とその定義述語におけるちょうど n 変数の命題関数との対応は，クラスとその定義述語におけるちょうど 1 変数の命題関数との対応と同等である。今後，関係はクラスとみなして話を進める。

5. 「もののクラスは，いかなる意味においてもひとつの対象物としての存在をもつか，ということを決定することを我々は避けてきた。」(Whitehead and Russell: Introduction, ch.I *20 の summary のはじめもみよ)。

6. ibid. 詳細は *20. ここに現代的な記法による短い表示を示す。以下の左側の形の文は，右側の形の文で置き換えることができる。

$$\{x : \mathrm{G}(x)\} = \{x : \mathrm{H}(x)\} \qquad \forall x[\mathrm{G}(x) \leftrightarrow \mathrm{H}(x)]$$
$$y \in \{x : \mathrm{G}(x)\} \qquad \mathrm{G}(y)$$
$$\Phi(\{x : \mathrm{G}(x)\}) \qquad \exists \mathrm{H}[\forall x[\mathrm{G}(x) \leftrightarrow \mathrm{H}!(x)] \& \Phi(\lambda x.\mathrm{H}!(x))]$$

おおまかにいうと，最初のものは「G たちのクラスは H たちのクラス」を「あるものが G であるとはそれが H であるとき，かつそのときに限る」といい換えており，

2番目は「y はGたちのクラスの要素である」を「y はGである」といい換え，さらに最後のものは,「Φ はGたちのクラスで真である」を「Φ はGと共外延的な平坦な命題関数Hについて真である」といい換えている。(「!」で表される) 平坦さは次の還元公理の節で説明される。

7. Whitehead and Russell (1910-13: Introduction ch.III)．クラス項は，それらを含む文の翻訳 (前の注をみよ) がクラスに言及する構成要素をもたないので，**不完全**であるといわれる。ある文において言及されるいかなるものもそのすべての翻訳において言及されると仮定すると，不完全な記号は，それが現れる文の表面的な構文において言及されない名前のような構成要素であるといえる。

8. Russell (1903 ch.6).

9. Russell (1903) は，Frege (1893) や Peano (1895) によるクラスの形式理論に言及している。

10. 何もないところに1つのもの，つまり何もないもののクラスがあるとはどういうことだろうか。ちょうど1つのものがあるところに，2つのもの，つまり1つのものとそれを含む単クラスがあるとはどういうことだろうか。

11. ラッセルは，彼のパラドクスや他のパラドクスについて『数学の原理』に書いている (Russell 1903).

12. この議論は1937年に出版された『数学の原理』第2版の導入において現れる。

13. **PM** への道筋において，循環論法が避けられれば，クラスについての言明はみせかけの言葉 (façon de parler) とみなされるべきであると論じている。しかし，この議論は変数の範囲が無制限であることを仮定しており，これは **PM** で拒否された仮定である (Russell 1906*b*).

14. 実際には，**PM** 第1版ではこの階層について2つの異なる説明がなされており，第2版の説明はさらに異なるものである。マイケル・ポッターはこのことについて Potter (2000) で踏み込んでいる。ここで与えた説明は基本的な考えに忠実なものである。

15. 述語 $\varphi(x)$ は命題関数 $\lambda x\varphi(x)$ とクラス $\{x : \varphi(x)\}$ の定義述語である。

16. Whitehead and Russell (1910-13: Introduction. ch.II, sec v と *12 終りの summary)。

17. 階を示すのに肩付き変数を使うことにすると，2階と3階の命題関数は

$$\lambda x^0[\forall\varphi^1(\varphi^1\text{は偉大な将軍に必要とされる} \to x^0 \text{ は } \varphi^1 \text{ をもつ})],$$
$$\lambda x^0[\forall\varphi^2(\varphi^2\text{は偉大な将軍に必要とされる} \to x^0 \text{ は } \varphi^2 \text{ をもつ})]$$

と表される。

18. **PM** においては「型」と「階」の表現がともに使われているが,「型」の使われ方は，一様ではない。ほとんどの箇所において，**PM** での使われ方はここで与えた今日 標準的となっているものである。

19. 再び階を肩付き文字で表すと，これらの関数は

$$\lambda\varphi^1[\varphi^1(\varphi^1\text{は偉大な将軍に必要とされる})],$$

$\lambda\varphi^1[\forall x^0(\exists\eta^2(\eta^2$ は偉大な将軍に必要とされる$\&x^0$ は η^2 をもつ $\rightarrow x^0$ は φ^1 をもつ$)]$

と表される。

20. **PM** 初版の前書きにおいて，著者たちは型と階の理論の他の変種も彼らのものと同様に機能することを認めている。よって，置換公理に対する彼らの意図がなんであれ，代わりのものもおそらく受け入れられたであろう。

21. θ を任意の命題関数 (p.f.) とする。θ の型を 1 とする。このとき自明に，θ の階数 ≥ 1 である。帰納法の仮定として，すべての $k \geq n$ に対して型 k の p.f. は階 $\geq k$ をもつとする。$n \geq 1$ として，θ の型を $n+1$ とする。θ の自由変数は型 n をもち，よって型 n の p.f. をその変域としてとる。仮定により，それらの p.f. は階 $\geq n$ をもち，よって，θ の自由変数は階 $\geq n$ をもつ。よって，θ における変数の階の最大値は $\geq n$ である。θ の階はこの最大値より 1 だけ上であるから，θ の階は $\geq n+1$ である。ゆえに数学的帰納法により，p.f. の階がその型より小さくなることはない。

22. Whitehead and Russell (1910-13: Introduction, ch.II, §§iv.v).

23. ここで省略した詳細を扱う形式的体系を記したものとしては，Hatcher (1982: ch.4) における体系 PT と RT を参照せよ。

24. 「実解析」は「実数解析」の慣例的な略称である。この点は複素解析にもあてはまり，こちらは実解析の拡張となっている。

25. 実数 r が c の**上界**となるのは，c の中のすべての x について $x \leq r$ となるときである。また，実数 s が c の**最小上界**となるのは，s は c の上界で，c のすべての上界 u に対して $s \leq u$ となるときである。「最大下界」の定義も同様である。

26. このことの例として，デデキント切断は有理数の空でない集合の順序対 $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ で，(a) 任意の有理数 p と q に対し，$p < q$ かつ $q \in \mathrm{A}_1$ なら $p \in \mathrm{A}_1$ であり，(b) A_2 は A_1 に属さない有理数の集合であり，(c) A_1 は最大要素をもたない，ようなものであったことを思い出そう。実数を (**下方**または**左**切断として知られる) 切断の最初の要素として定義する通常の慣例に従うこととし，c を定義される実数のクラス $c = \{r : \varphi(r)\}$ とする。ここで r の範囲は実数すべてを含む。このとき c が上界をもつなら，c の最大上界は c の要素の共通部分として定義される。つまり

$$\mathrm{l.u.b.}(c) = \{q : q \text{ は有理数 } \&\exists r[\varphi(r)\,\&\, q \in r]\}.$$

この c の最大上界の定義は非可述的である。なぜなら，それは束縛変数 r の範囲に入っているからである。

27. **PM** における実数の扱いは*310 にみられるが，いくつかの概念の定義はそれ以前の部分に散在している。実数は事実上，下方切断として定義されている。実数論の公理へのわかりやすい入門については，Apoltol (1967: introd. p.3) を参照せよ。

28. **PM** の執筆および改訂の時期において，分岐型理論での還元公理を用いない実解析が古典論理より弱い，ということは確からしいように思われた。このことは後に証明されている (技術的な注意：この証明は実解析が無矛盾であることを仮定したうえ

でのゲーデルの第二不完全性定理の応用である。というのは，分岐解析の無矛盾性は古典解析，さらには Burgess and Hazen (1998) によって原始帰納算術においてすら証明可能だからである)。

29. Myhill (1974). **PM** 第 2 版の vol.I の付録 B (Whitehead and Russell 1925-7) では，最終的に証明されてはいない階についての主張の下に，自然数上の帰納法の議論が与えられている。Gödel (1944) を参照。

30. Gödel (1944).

31. **PM** においては,「平坦」の代わりに「可述的」という単語が使われている。**PM** の語法は紛らわしい，というのは「可述的でない」と (今日の用法での)「非可述的」はきわめて異なっているからである。**PM** の宇宙は (自身を含むようなクラスについて定義されるものではないので) 非可述的な命題関数を含まないが，(それが適用されるものの階の 1 つより上の階をもつものは多くあるので)「可述的」でないものは多く含んでいる。

32. Whitehead and Russell (1910-13: *12.1, *12.11).

33. **PM** の体系において古典数学を展開するという計画に含まれる推論において，このことは正しい。それは**不透明**な，あるいは**内包的**な文脈，つまり共外延的な命題関数と区別することを要求されるような文脈においては正しくない。特に，あるパラドクスについての推論においては正しくなく，これは Church (1976) によって指摘されている。

34. この例として，c を $c = \{r : \varphi(r)\}$ で定義される，上から押さえられた空でない実数のクラスとしよう。そこで実数を左切断とすると，c の最小上界はクラス $\{q : q$ は有理数 $\& \exists r[\varphi(r) \& q \in r]\}$ として定義される。還元公理によって，q より階が 1 つ上の命題関数 $\lambda q.\psi(q)$ で，すべての q に対して q が有理数 $\& \exists r[\varphi(r) \& q \in r] \Leftrightarrow \psi(q)$ であるようなものが存在することを仮定できる。すなわち，c の最小上界は $\{q : \psi(q)\}$ であり，(クラスの階はそれに対応する命題関数の階であるので) 後者はその要素 q の階 (そしてこれは c の要素 r の階であることがわかるのであるが) より 1 つ上の階をもつ。よって，実数のクラスの最小上界はそのクラスの実数と同じ階をもつ実数であるとすることができる。

35.「x は f の下で閉じている」ことは「x の任意の要素 w に対して，$f(w)$ もまた x の要素である」ことを意味し，このことを記号化する一つの方法は「$f[x] \subseteq x$」とすることである。性質 F をもつ最小のクラスは性質 F をもち，性質 F をもつすべてのクラスの部分クラスになっているものである。

36. クラス $\{x : \forall y[(c \subseteq y \& f[y] \subseteq y) \to x \in y]\}$ は変数 y の範囲に入っている。

37. $\forall y[(c \subseteq y \& f[y] \subseteq y) \to x \in y]\}$ における x たちの階を $n-1$ とする。還元性により，まず y たちの階は n であり，次に関数 $\lambda x.\psi(x)$ で $\{x : \psi(x)\} = \{x : \forall y[(c \subseteq y \& f[y] \subseteq y) \to x \in y]\}$ となるものが存在する。ここで $\{x : \psi(x)\}$ はその要素より 1 つ上の階 $1+(n-1)$ をもつことを仮定することができる。ここでの等式は，こ

の n 階のクラスが意図したものであることを示している。

38. Whitehead and Russell (1910-13: Introduction, ch.II, §vii). Russell (1910: §vii) と Russell (1907) を参照。

39. ここで意味しているものは，ラッセルによって記述された疑似経験的な帰納法であり，数学的帰納法の原理ではない。

40. Whitehead and Russell (1910-13: Introduction, ch.II, §vii). ラッセルがいつこの訓戒を受け止めたのかは定かではない。彼は『数学の原理』においてもまだ，確実性は成し遂げられると書いている (Russell 1903: ch.I, §II) が，すでにフレーゲの体系において矛盾を発見していたのである。おそらく，確実性についての言明のある節は矛盾を発見する以前に書かれた原稿の未改訂部分だったのであろう。

41. 「還元性は自明であるということは支持しがたい命題である」(ibid.)

42. これは Russell (1907) においてはじめて公的に表明されており，そこで彼は還元公理を名前をつけずに導入している。

43. これについては大きな疑念がある。ゲーデルは公理を擬帰納的に知ることの可能性を認めているが，彼は公理を受け入れることの基礎には「つねに主として帰納的」なものがあるというラッセルの主張からは後退している。本質的な妥当性の度合いが顕著でない公理が (演繹の仮定に反して) 真実として広く受け入れられているかどうかということは，興味深い問題である。

44. しかし，ホワイトヘッドとラッセルは，分岐型理論からは導くことのできない数学的帰納法の例があるということを知らなかった。この注 29 を参照せよ。これはかなり後に Myhill (1974) で示されている。

45. 帰納された性質とは,「$\varphi(0)$ かつ $\varphi(n)$ であるすべての n について，$\varphi(n+1)$ ならすべての m について $\varphi(m)$」という論理式における $\varphi(x)$ の代わりとなる述語で表されるものである。

46. これを少し詳細に述べよう。**初等算術**とは，後継関数の標準的公理と加法，乗法と指数関数の定義式，加えて帰納される性質が上限のない量化子をもたない (数学的) 帰納法で構成される算術とする。Burgess and Hazen (1998) は，初等算術が還元公理のない分岐型理論で解釈可能であることを示した。初等算術には，ほとんど明白であることが適切に記述できる大半のものや，データとみなすことができるすべて，またはほとんどの算術を含むと考えられる。初等算術は，原始帰納算術には及ばないものであり，後者は還元性なしの分岐型理論では解釈できない。

47. Whitehead and Russell (1925-7: 第 2 版の introduction). マイケル・ポッターは，ホワイトヘッドは第 2 版の改訂には関わっていないと指摘している。よって，おそらくはラッセルのみが考えを変えたのであろう。しかし第 2 版にはホワイトヘッドの出版許可があっただろうと推測されるので，これを根拠に両方の著者を参照することにする。

48. ibid.

49. これは「自明性は決して不可避ではない」という主張からの後退であろう。しかし**PM** 第 2 版の序文において，この公理には異論の余地があることが暗に示されている。つまり,「$2^n > n$ であることのカントルの証明も，n が有限でなければ機能しない。おそらく，もっと他の公理で還元公理より異論の余地が少ないものからも，これらの結果が得られるかもしれない。しかし，我々はそのような公理を発見していないのである。」

50. Whitehead and Russell (1910-13: *88.03). 簡明な解説については *88 の summary を参照せよ。この公理はクラス c が無限であるときのみに必要である。クラスたちはそれらのうちのどの 2 つも共通要素をもたないとき,「互いに素」である。

51. このことは第 V 部の第 1 章で論じられる。

52. 例えば Whitehead and Russell (1910-13: *112 と*114) の定理を参照。

53. Whitehead and Russell (1910-13: *120.03).

54. Whitehead and Russell (1910-13: vo.II §C の summary)

55. Russell (1919:141).

56. 臨界数以上はすべて空クラスと同じになる。このことは Whitehead and Russell (1910-13) の *120.03 の次の 2 番目の段落で指摘されている。

57. Russell (1956*b*).

58. Russell (1959). ロビン・ギャンディはラッセルとの会話でケンブリッジのチューターのずさんさについて例証したものを記録している。彼らは二項定理を正整指数についてしか証明していないにもかかわらず，実指数について成り立つといい，使ったとラッセルは思い起こしている。「私は一般的な場合にどのように証明するのかと尋ねた。『証明は』と彼らは答えた。『形式不変性の原理による。』！」(Gandy 1973).

第 3 章

1. Russell (1903: ch.VI, §78; ch.X, §101). ラッセルは「の述語である」を「について真である」のこととして用いている。

2. Grelling and Nelson (1908).

3. 注意：$\forall c$ は「すべての c について」を意味し，$\neg$ は「でない」を意味する。

4. 一般的な議論は次のようになる。まず r_n が r_n について真である，つまり $\mathrm{r}_n\mathrm{Tr}_n$ とする。すると $c_i = \mathrm{r}_n$ $(1 \le i \le n)$ について $\mathrm{r}_n\mathrm{T}c_1 \,\&\, c_1\mathrm{T}c_2 \,\&\, \cdots \,\&\, c_{n-1}\mathrm{T}c_n \,\&\, c_n\mathrm{Tr}_n$ である。よって r_n は r_n について真でない。したがって，r_n が r_n について真であるとすると，r_n は r_n について真でないということになる。すると $(\mathrm{P} \to \neg\mathrm{P}) \to \neg\mathrm{P}$ という規則から，(i) r_n は r_n について真でないことになる。次に，r_n は r_n について真でないとする。すると，ある $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ について $\mathrm{r}_n\mathrm{T}c_1 \,\&\, c_1\mathrm{T}c_2 \,\&\cdots\&\, c_{n-1}\mathrm{T}c_n \,\&\, c_n\ \mathrm{Tr}_n$ となる。$\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \ldots, \mathrm{d}_{n-1}, \mathrm{d}_n$ を

$$(\$)\ \mathrm{r}_n\mathrm{Td}_1 \,\&\, \mathrm{d}_1\mathrm{Td}_2 \,\&\cdots\&\, \mathrm{d}_{n-1}\mathrm{Td}_n \,\&\, \mathrm{d}_n\mathrm{Tr}_n$$

であるようなものとする。1 番目の連言肢は r_n が d_1 について真であることをいっている。つまり

$$(£)\ \forall c_1 \forall c_2 \cdots \forall c_{n-1} \forall c_n \neg[\mathrm{d}_1 \mathrm{T} c_1 \,\&\, c_1 \mathrm{T} c_2 \,\&\, \cdots \,\&\, c_{n-1} \mathrm{T} c_n \,\&\, c_n \mathrm{T} \mathrm{d}_1]$$

である。しかし $c_n = \mathrm{r}_n$ かつ $1 \leq i \leq n-1$ のとき $c_i = \mathrm{d}_{i+1}$ とおくと，($) の 1 番目の連言肢を最後に移すことにより ($) から (£) の反例が得られる。ゆえに r_n は r_n について真でないという仮定は矛盾を導く。したがって，**背理法**により，r_n が r_n について真であることにはならない。つまり (ii) r_n は r_n について真である。最後に (i) と (ii) を合わせると矛盾が得られる。

5. これについての基礎となるのは Diogenges Laertius (1925: II, 108) である。ディオゲネス・ラエルティオスは紀元 3 世紀に生きた。彼はさまざまな信憑性の出所による自身の仕事を編纂している (Robert Sharples，私信)。Hamblin (1970: 89-91) を参照。

6. Diogenges Laertius (1925: V.49).

7. これはなぜなら，要素の鎖が矛盾するなら，どんな肯定文 (つまり「Y は真である」という形の言明) の列を挿入しても矛盾するからである。

8. 「この文は真である命題を表さない」のようなうそつきパラドクスの変形を扱うためには，同じことが命題の代わりに文についても成り立たなければならない。

9. ラッセルによると，特定の記述は文によって表現される命題に含まれている構成要素のことではない。よってそれは「言及する」という単語の狭義の用法において，なにかを言及することには用いることができない。しかしここではこの単語を広義に用いているので,「x はこれこれである」という条件を満たす唯一のものは,「これこれ」という特定の記述の使用によって言及されるものである。提案された回答が，例えば「いま行っている声明は真ではない」に基づくうそつきパラドクスの変種を扱うものならば，このことは必要である。

10. Kripke (1975).

第 4 章

1. ラムジーは 1930 年に 26 歳で死去している (D. Meller による Ramsey 1990 の introduction を参照)。そのときすでに彼は重要な哲学論文を出版しており，その数理論理学における業績において，後にラムジー理論として知られる組合せ論の一分野を生み出すことになった定理を証明している。

2. Ramsey (1925).

3. ラムジーは，2 番目のパラドクスのグループについてのこの見解の，より以前の提唱者としてペアノを引用している。「言語的」としたのはペアノによるものである。ラムジーはそれを認識論の問題とみなすといっているが，そのことはこれらのパラドクスに対する彼の分析とは調和しない。

4. ラムジーはこのパラドクスをワイルによるものであるとしている。

5. Ramsey (1925: §1 の最後)。

6. Russell (1903: ch.X §101). ラッセルがこれらのパラドクスを同一視したことは，クラスに関する言明を命題に関する言明とみなすように考えが傾いていたことに基づくのかもしれない。

7. Hart (1983); Feferman (1984a). Parsons (1974) では，ラッセルのパラドクスとうそつきパラドクスの対比についてのコメントがある。

8. 形式的言語では，関係は $\lambda\varphi\lambda x[\varphi \mathrm{R} x]$ であり，それから全称量化によって得られる命題関数は $\lambda x[\forall\varphi[\varphi \mathrm{R} x]]$ である。

9. Ramsey (1925: §ii).

10. ibid. §iv.

11. Russell (1919: 202).「無限公理は論理の言葉で明確に述べることができるが，論理によっては真であることが断定できない命題の例と考えることができる。」　これらの仕事の出版年は順に 1903, 1910, 1919 である。

12. Ramsey (1925: §i). トートロジーが**完全に一般的**であるとは，その記号表現が個体定項の記号を含まないときとする。トートロジー以外に論理的真実があるかどうかという問題については扱われていない。ラムジーは，彼が示したトートロジーの説明の出所として，Wittgenstein (1922) を引用している。

13. 厳密にいえば，型インデックスはトートロジーを得るために与えられなければならない。

14. Ramsey (1925: §v).

15. ベーコンがシェイクスピアと別人であるのは必然であり，宵の明星は明けの明星と異なることはありえない。しかしながら，ベーコンがシェイクスピアと別人であることを否定する人たちは，論理的な誤りを犯しているのわけではない。その一方でトートロジーを否定したとすれば，論理的な誤りを犯したのであろう。同様に，宵の明星が明けの明星と異なるといった人たちは，自己矛盾していない。(a と b とが) 異なっているという主張についても指示詞を用いることで同じ考えがあてはまる。

16. Russell (1903: §111). この見解は『プリンキピア・マテマティカ』においても，クラスによる定義は命題関数による定義の略記である，という修正を経て維持されている。

17. 『プリンキピア・マテマティカ』においては $i \neq h$ のとき型 i のもののクラスと型 h のもののクラスとが異なるのは，$\{x_i : x_i \neq x_i\}$ は型 $i+1$ であり，$\{x_h : x_h \neq x_h\}$ は型 $h+1$ だからである。ラムジーの説明では，これらが異なるのは，それぞれ型 i のもののクラスと型 h のもののクラスという異なった領域をもっているからであり，ともにその領域に属するすべてに矛盾を与えているのである。

18. この主張についての議論は，第 II 部の第 4 章で与える。

19. ア・プリオリ (先験的) な真実とは，それ自身，あるいはそれに基づく前提の根拠として，経験を用いずに知ることができるものである。

第Ⅳ部

第 1 章

1. Zermelo(1908).

2. カントルは例外的に，パラドクスの発見に先立って，クラスは内包原理と共存できないという見解をもっていた。

3. 特にルベーグが Baire *et al.* (1905) で。この議論に関しては Monna (1972), Moore (1982), この後の第 V 部の第 1 章を参照せよ。ホワイトヘッドとラッセルが抱いたこの公理に対する疑念は第 III 部の第 2 章を参照せよ。これは本質的にルベーグの考えと同じである。

4. 多くの公理的集合論の説明においては，この仮定は基礎の論理に組み込まれている。

5. Borzano (1851:§13), Dedekind (1888: §v, th.66).

6. お忘れの読者は第 I 部の第 2 章の順序数の小節を参照。

7. 例外が 1 つある。それは空集合のみを要素としてもつ集合である。空集合は自明に空な関係によって整列可能である。

8. Von Neumann (1923).

9. これは次のように集合論的に定義される。x が順序数であるとは，x は $\in$ によって整列されていて，x のすべての要素は x の部分集合となっていることとする。

10. Hilbert (1925).

11. $\{\aleph_\beta : \beta < \lambda\}$ は $\{x : x = \aleph_\beta \,\&\, \beta < \lambda\}$ の略記である。

12. Cantor (1899), ここで彼は分出公理と合併集合公理についてもふれている。

13. なぜ「置換」なのか。Frankel (1922*a*) が行ったように，1 対 1 対応について，ある集合の要素と対応物が組になっていると考える代わりに，その要素が対応物に置換されたとみることができる。いま用いている置換公理は Skolem (1922) によるものである。

14. 1 対 1 対応は $\mathrm{F}(w,y)$ かつ $\mathrm{F}(x,y)$ ならば $w=x$ となる関数関係 $\mathrm{F}(x,y)$ にほかならないから，置換公理はカントルの原理を包含している。逆を示そう。カントルの原理を仮定する。F を，集合 m を定義域にもつ関数関係とする。$\mathrm{F}[m]$ が集合であることを示せばよい。$\mathrm{F}[m]$ の要素 y に対し，$\mathrm{F}^{-1}(y)$ で $\{x : x \in m \,\&\, \mathrm{F}(x,y)\}$ を表すことにする。これは m の部分クラスになり，したがって (分出公理により) 集合になる。だから $\mathrm{F}[m]$ の任意の要素 y に対し，$\mathrm{F}^{-1}(y)$ は $\mathbb{P}(m)$ に属する。ここに，ベキ集合公理により $\mathbb{P}(m)$ は集合である。$d = \{z : \exists y[y \in \mathrm{F}[m] \,\&\, z = \mathrm{F}^{-1}(y)]\}$ とおく。d は $\mathbb{P}(m)$ の部分クラスであり，したがって (分出公理により) 集合である。いま，d を定義域とする関係 $\mathrm{R}(z,y)$ を $z = \mathrm{F}^{-1}(y)$ と定める。R は d と $\mathrm{F}[m]$ の間の 1 対 1 関係であることは明白であろう。d が集合であることから，カントルの原理より $\mathrm{F}[m]$ が集合であることがわかる。置換公理がカントルの原理と同値であるという事実は，この公理を採用する唯一の理由が次の日和見主義であるという Boolos

(1971) の見解をくずすものである。「この公理から多くの望ましい帰結が導かれ，知られている限り望ましくない帰結は導かれていない。」この見解は Boolos (1984) では取り下げられたが，そこでも置換公理のもととなったカントルの原理についてはふれられていない。

15. Von Neumann (1925). フォン・ノイマンの用いた用語はまったく違うものであって，他では採用されていない。

16. 置換公理が分出公理を包含することを示すのは難しくない。(ヒント：F を，順序対のクラス $\{\langle x,x\rangle : x \in B\}$ とせよ。)　フォン・ノイマンは置換公理と選択公理が導出できるより一般的な原理を用いた。

17. Von Neumann (1925). このアイデアは Fraenkel (1925*a*) によってすでに与えられていた。

18. 第 II 部の第 2 章を参照。

19. Von Neumann (1925:§2, §§3.iii, 3.iv) を簡略化した。フォン・ノイマンの理論は (クラスでない) 個体を許した。真のクラスであるということの尺度は，本文に書いたことと同値であるが，真のクラスとは，その値域がすべての集合と個体からなるクラスを値域にもつ関数の定義域であるというものである。

20. もちろん，公理図式は十分に形式的厳格さをもたなければならない。例えば，$\forall m \exists y [S(y) \,\&\, \forall x[(x \in y) \leftrightarrow (x \in m \,\&\, \psi(x))]]$ などというとき,「y」は $\psi(x)$ に現れない。

21. Skolem (1922). この注目すべき論文において，スコーレムはツェルメロの問題を解決しただけでなく，次の置換公理 (図式) の必要性を証明している：$\forall x \forall y \forall z([\psi(x,y) \,\&\, \psi(x,z)] \rightarrow y = z) \rightarrow \forall m \exists w(S(w) \,\&\, \forall y[(y \in w) \leftrightarrow \exists x(x \in m \,\&\, \psi(x,y))])$. ここに,「$w$」は開文 $\psi(x,y)$ に現れない。任意の分出公理図式の代入結果が置換公理図式の代入結果から導かれることを示すのは難しくない。

第 2 章

1. Hausdorff (1914) が古典的な参考文献である。

2. 「カントルが我々のために作り上げてくれた楽園から我々を追い払うことは，誰にもできないだろう」(Hilbert 1926).

3. Von Neumann (1925).

4. あるいは個体つき ZFC. 状況によっては個体を排除することもある。ZF は ZFC から選択公理を除いたものである。NBG はノイマンによる公理化のベルナイス，ゲーデルによる改良である。スコーレムの発見はこれらすべての場合にあてはまる。

5. Skolem (1922: §6). ここで彼は連続体仮説がこの体系から独立だろうということをそれとなく述べている。この事実が証明されたのははおよそ 40 年間後である。

6. Zermelo (1930) はまさにそうしたのである。この公理は基礎の公理として知られる。

7. D 上の n 変数関数の外延 (グラフ) とは，第 1 の要素が D の要素 n 個の組で，第 2 の要素が D の要素であるような順序対のクラスで，どの 2 つの順序対も同じ第 1 の

要素をもたないものである。1 項関数については，これは単にどの 2 つの順序対も同じ第 1 の要素をもたない順序対のクラスにすぎない。

8. Löwenheim (1915); Skolem (1920, 1922).

9. Skolem (1922).

10. この仮定はモストフスキの「折りたたみ定理」によって正当化される。この定理が証明されたのは LS よりずっと後だった。

11. 集合論において，関数 d は $d(n)=x$ なる順序対 $\langle n,x\rangle$ の集合と同一視される。関数 d が集合 c を**数え上げる**とは，d が ω (の始切片) からの関数で，任意の c の要素 x に対しちょうど 1 つの ω の要素 n で $d(n)=x$ なるものがあるときである。(ω は有限順序数の集合で，集合論において自然数の集合の代表である。)

12. Hansenjaegar (1967).

13. より大胆で，かなりとっぴな帰結も LS と関連する事実から得られる。しかしその議論はしばしば不十分なものである。

14. Dedekind (1872).

15. 有理数の列 $\{r_n\}$ が**コーシーの条件**を満たすとは，任意の整数 $n>0$ に対しある整数 $m>0$ で，任意の整数 $k>m$ に対し $|r_m-r_k|<1/2^n$ なるものがあるということである。

16. Brouwer (1929:§iii) において直観主義的反例が与えられている。

17. ブラウワーの主要論文の (翻訳された) 題目は「排中律なる論理的原理から独立な集合論の基礎」であるが，その内容は明らかに改正されている (Brouwer 1918, 1919)。後の仕事で，彼は「形式主義者の再構築」と「直観主義者の再構成」をくっきりと対比している (Brouwer 1928). 彼の見解とその発展の解説については van Stigt (1990) を参照せよ。

18. Weyl (1918).

19. **デデキントの左切断**とは，空でない有理数の集合 C で (a) どの C の要素よりも大きい有理数があり，(b) 任意の有理数 p,q に対し，$p<q$ かつ $q\in \mathrm{C}$ なら $p\in \mathrm{C}$ で，(c) C は最大要素をもたないものである。

20. 復習：r が実数の集合 S の**上界**であるとは S のどの要素も r より小さいか r と等しいことであり。**上限**であるとは S の上限のうち最小のものであることである。

21. ワイルの階数 (あるいは水準 (level)) の理論については Mancosu (1998*b*) を参照されたい。ワイルは階数の区別は数学の言語に組み込まれるべきだとし，ホワイトヘッドやラッセルの方針には従わなかった。

22. Weyl (1920). 助けになる解説としては Mancosu (1998*b*) を参照せよ。

23. Weyl (1925).

24. Hilbert (1922).

第3章

1. Hilbert (1926).
2. Hilbert (1929); Bernays (1930*b*) も参照のこと。ベルナイスはヒルベルトの主な共同研究者だった。基本計画で重要な役割を担った他の人に，アッケルマン，フォン・ノイマンがいる。
3. この規則は「全知の原理」としても知られている。
4. 1742 年の数学者 オイラーへの書簡でなされたこの予想は，現時点で未だ解決されていない。
5. 明白でない文脈は間接話法，信念の表現，様相文，他を含む。これらは普通の数学の論述とは関連しないものである。
6. 同じ理由で，有限主義は次の否定の遷移法則，すなわち，すべての x がゴールドバッハの性質をもつわけではないということは，ある x がゴールドバッハの性質をもたないとき，そしてそのときに限り正しいことを受け入れない。
7. ここでは，領域の部分集合でなく領域の要素を動く量化記号をもつデデキント–ペアノの算術，すなわち 1 階のデデキント–ペアノ算術を意図した。
8. Hilbert (1926).
9. Smorynski (1989) に従った。
10. ここであげたものよりもっと強い条件が仮定されているかもしれないが，筆者はそれが何であるかはっきりわからない。
11. しかし，そこから導かれる厳密に有限な情報が正しいという意味で真理を表示してはいるが，思考が真理値をもちうるとはいえないだろう。これはほかで追求されるべき意味論の問題である。ここでは，真なることと真であると表示されることの違いは無視する。
12. Hilbert (1926), van Heijenoort (1967:376) において。
13. 量化相互定義可能律とは $[\forall x\varphi(x) \leftrightarrow \neg\exists\neg\varphi(x)]$ であり，否定遷移律とは $[\forall x\neg\varphi(x) \leftrightarrow \neg\exists x\varphi(x)]$ と $[\neg\forall x\varphi(x) \leftrightarrow \exists x\neg\varphi(x)]$ である。
14. 定理の「直線」と「点」を入れ替えるとまた定理になる。
15. 理論は，直接試験可能な予想を得るために，観測可能な状態に理論的変動数連結した他の理論とともに用いられるべきであると理解されている。
16. Hilbert (1928*a*), Heijenoort (1967:457) において。
17. Hilbert (1922), (1926, 1928*a*) でも繰り返された。Heijenoort (1967:367, 464) を参照。
18. ここでは少しばかり単純化しすぎた。我々が考慮する符号が手書きのものを含んでいたら，与えられた記号の実例であるかどうか知覚的に決定可能でないものがでてくるだろう。しかし，符号を普通の機械的印刷によって得られるものに制限することによって (この問題は) 修正できる。
19. PRA の発想については Cutland (1980: ch.3, §3) を参照。

20. Skolem (1923); Hilbert and Bernays (1934:307-46). この同一視は実用的なものであろう。有限的論法の範囲についてはいくつかの論議があった。PRA に等しいとするもの (Tait 1981), より狭いものを要求したもの (Niebergall and Schirn 1998), より広いものを要求したもの (M. Detlefsen, 私信による)。

21. Tait (1981:§§ii-vi) を参照。

22. 古典的な説明としては Davis (1965:135-40) にある Turing (1936:ß8, i and iii) を参照せよ。多くの数理論理学の教科書には計算可能性についての記述がある。Boolos and Jeffrey (1974) のように，より詳しい記述のあるものもある。

23. 図式的には $\tau = \sigma \rightarrow [\varphi(\tau) \rightarrow \varphi(\sigma)]$, ここで，$\varphi(\tau)$ は τ を含む論理式で，$\varphi(\sigma)$ は τ の出現をすべて σ に置き換えて得られる論理式である。

24. これは正整数上の自由変数帰納法である。「$\varphi(1)$」の代わりに「$\varphi(0)$」を用いることによって自然数上の自由変数帰納法も得られる。

25. Hilbert and Bernays (1934:298) を参照。

26. いわゆる「厳格有限主義者」が例外になるだろう。

第 4 章

1. 「算術」は (正当化を必要としない) 原始再帰的算術ではなく，1 階のデデキント–ペアノ算術を表す。

2. おそらく適切な言葉は「帰納的」ではなく「間接還元的」であろう。しかし後者の言葉は前者も含むように広義に用いられる。ここでは前者を用いることにしよう。

3. Russell (1907). Russell は区別のために「経験的前提」「論理的前提」という表現を用いた。

4. 選択公理は,『プリンキピア・マテマティカ』では乗法公理 (Multiplicative Axiom) とよばれていた。

5. これはヒルベルトが最終的に到達した哲学的に重要な目標である。彼の考える計画の目標は進化したのである。

6. 与えられたこの言語の論理式が定理であるか否かを決定するエフェクティブな方法があるということはいえないことに注意せよ。

7. ex contradictione quodlibet や ex falso quodlibet としても知られる。

8. 全称代入は $\forall x\varphi(x)$ から $\varphi(\tau)$ への置換を包含する。ここで $\varphi(\tau)$ における τ の出現によって τ の自由変数が ($\varphi(x)$ の量化記号の作用域に入って) 束縛されないものとする。

9. Brouwer (1912), Poincoré (1905) も参照。これらの異論は 10 年以上にわたって，ヒルベルトの有限主義者の証明論の方法が打ち立てられる前から唱えられていた。

10. Brouwer (1928).

11. Smorynski (1989) の示唆によると，ブラウワーは (Hilbert, 1928*a*) を読んでもいなかったし，それをもとにした講義を聞いてもいなかった。

12. Weyl (1925, 1928).

第 V 部

第 1 章

1. R を，体系 T のシンタックスに属する対象物に関する k 項関係とする。S を算術の理論とする。

> S の言語の k 変数述語 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ が関係 R を S において**再現する**とは，S の任意の数項 $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k$ に対して，(1) $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k$ が $\mathrm{R}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ を成り立たせる対象物 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ のコードならば，$\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ が S で導出でき，(2) そうでないならば $\neg\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ が S で導出できる，ということである。

通常この再現の概念は，シンタックスに属する対象物に関する関係に対してではなく，自然数上の関係 (すなわち，自然数の組の集合) に対して定義される。その場合,「シンタックスに属する対象物に関する関係 R が S において φ で再現される」という上の定義は,「R を成り立たせる対象物の集合をコード化した自然数の k 個組の集合が (通常の意味で) 再現される」ということと同値である。なお，再現される (represented) の他の語句としては，strongly represented，binumerated，syntactically defined などがある。

2. この点に関する議論については Auerbach (1985, 1992) を参照せよ。

3. 多くのまったく異なる述語が，算術の真である形式体系において同一の性質を再現し，しかも，それらの述語の同等性がその体系では導出できない，ということもある。

4. 説明を簡単にするために，ここでは無限個の変数が原始記号であると仮定した (任意の論理式を書くためには変数の個数に上限がないことが必要である)。しかしこの仮定は本質的ではない。なぜなら，$\mathbf{v}$ を原始記号としたとき，以下に説明するように数項を定義して，それから変数を定義できるからである。α が数項であるための必要十分条件は α が $\mathbf{0}$ であるか，ある数項 $\mathbf{n}$ に対して α が $\mathbf{sn}$ となっていることである。α が変数であるための必要十分条件は，ある数項 $\mathbf{n}$ に対して α が $\mathbf{v_n}$ となっていることである。

5. $\langle n \rangle =$“コードが n の式”とする。数式を復号すると次が読み取れる。

> $\tau(x)$ が成り立つための必要十分条件は，$x = \ulcorner\mathbf{0}\urcorner$ であるか，ある $u < x$ に対して $x = \ulcorner\mathbf{v}_u\urcorner$ であるか，またはある $u < x$ とある $v < t$ に対して $\tau(u)$，$\tau(v)$ が成り立ち，$x = \ulcorner\mathbf{s}\langle u\rangle\urcorner$ または $x = \ulcorner+\langle u\rangle\langle v\rangle\urcorner$ または $x = \ulcorner\times\langle u\rangle\langle v\rangle\urcorner$ となることである。

ここに現れるすべての量化詞は限定的，すなわち，例えば「ある u に対して」ではなく「ある $u < x$ に対して」となっている。これは，このような定義が原始再帰性を保つために必要なことである。しかし，このことは述語の意味に影響を与えない。

なぜなら，式のコードはその一部分のコードより必ず大きいからである。この単純な事実に気づけば,「項であることの定義」と「述語 τ の定義」が並行的であることは明らかである。

6. PRA に関するこれ以上の説明や文献は，第Ⅳ部の第 3 章の『有限的推論 (方法)』の節を参照せよ。

7. 算術で定義可能であるということは,「通常の解釈で真になる $\mathcal{L}$ の文すべてを定理としてもつ理論において，再現される」ということである。

8. ゲーデルの第一不完全性定理 (First Incompleteness Theorem) という名前でも知られている。これは 1930 年に発見され，Gödel (1931) に発表された。タルスキの定理は Tarski (1932) に発表された。

9. T は命題論理を含むことにしているので，A と A $\leftrightarrow$ B が導出可能ならば B も導出可能である。また，全称代入 ($\forall x$A(x) から A(t) を導く) も T で使用可能としている。

10. 形式体系 T が ω 無矛盾であるとは，任意の論理式 $\varphi(x)$ に対して次が成り立つことである。$\varphi(\mathbf{n})$ が任意の数 n について T で導出可能ならば，$\neg\forall x\varphi(x)$ は T で導出不可能である。ω 無矛盾は無矛盾を含意する。実際には，ゲーデルの議論には “1 無矛盾” とよばれる ω 無矛盾の部分条件で十分である。

11. この不完全性という性質はシンタクティックである (すなわち，文や導出といったシンタックスに属する対象物に関する条件だけで定義されている)。これは次の意味のセマンティックな不完全性と区別する必要がある。T がセマンティックに不完全であるとは，次の条件を満たす T の言語による文 α が存在することである。α は T のあるモデルでは真になるが，T のすべてのモデルでは真にならない。セマンティックな不完全性は，シンタクティックなものと違って (モデルを扱うという) 集合論を前提にしている。さらに，両者の概念は 2 階の論理では一致しなくなる。(このほかに，言語 L の導出関係 $\vdash_L$ に関する不完全性という概念もある。注 21 を参照。)

12. Rosser (1936)．ロッサー文 δ は次のことを記述している。$\neg\delta$ の導出が先にない限り (すなわち，T における導出をコードの順で並べたときに，より小さいコードの導出で $\neg\delta$ が導かれない限り) δ は導出できない。

13. 彼はこの結びつきについて Gödel (1931) (Gödel (1986: 149, 151) にある) で言及しており，Gödel (1934) の §7 (Gödel (1986: 362, 363) にある) で詳しく書いている。

14. T が PRA を含む無矛盾な算術体系のとき，T + $\neg\gamma$ (T に T のゲーデル文の否定を公理として追加した体系) は，無矛盾であるが健全ではない。したがって無矛盾性は健全性を含意しない。しかし健全性は無矛盾性を含意する。なぜなら，算術のある文とその否定がともに真であることはありえないからである。

15. Wang (1981: 654), Feferman (1984a) を参照。うそつきパラドクスの代わりに別の二律背反を使っても，弱い不完全性定理が同様に証明できることを，ゲーデルは指摘している。文献は Gödel (1931: n.14) (Gödel (1986: 149) にある)。Boolos (1989)

はベリーのパラドクスをこれに使っている。

16. これは人を酔わせる話題であり，独特の文献群がある。Webb (1968) は冷静な分析である。

17. 対角化の方法については，第 III 部の第 1 章のリシャールのパラドクスの解説を参照せよ。

18. Hilbert (1900*b*). 同じことは Hilbert (1900*a*) でも述べられている。この考えのもっとも有名な表現は，1899 年のフレーゲへの手紙に次のように書かれている。「もしも任意に選ばれた公理たちがそれらからの帰結と互いに矛盾しないならば，それらは真であり，それらによって規定される対象は存在する」(Frege (1980) に訳がある)。ヒルベルトは，公理系がその対象を規定できるとしているが，それには公理系が**範疇的**であることが必要である。ただし範疇的とは，妥当な解釈によりそれらの公理を真にするような構造はすべて同型である，ということである。ヒルベルトは，実数に関する彼の公理系が範疇的であると指摘していた (これは Hallett (1995) からとった)。ところが，例えば集合論の公理系のように，興味の対象となるすべての公理系が範疇的であるわけではない，しかし存在の問題と定義の問題とは切り離すことができる。なぜなら，問題を次のように問うことがきるからである。公理を妥当に解釈したとき，それらをすべて真にするような構造は存在するか。「その公理系が無矛盾ならば Yes.」　これが世紀の変り目でのヒルベルトの答えである。

19. 「(自由変数をもった) 論理式」と「対象領域の要素の列」との間の「論理式がその列に関して真になる (列が論理式を満たす)」という関係を再帰的に定義して，それを通して文の真偽が定義される。この真偽の定義には，論理記号 ($\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$ 等) のセマンティクスにおける役割も含まれている。真偽の定義は，形式論理のどんな教科書にも載っている。

20. Hilbert and Ackermann (1928). 言語 $\mathcal{L}$ の文 α が $\mathcal{L}$ の文の集合 Γ の**意味論的帰結**であるとは，Γ の要素をすべて真にする任意の解釈において α が真になることである。意味論的帰結は次の**証明論的帰結**と区別される。α が Γ の証明論的帰結であるとは，Γ から α を導出できることである。“ 帰結 ” という言葉と同様に，“ 定理 ” という言葉にも多義性がある

21. これがゲーデルの最初の大きな発見であり，学位論文であった (Gödel 1929). この結果は 1 階論理の完全性，すなわち「α が Γ の意味論的帰結であるときには必ず Γ から α を導出できる」と同等であることが簡単にわかる。このように，導出関係は 1 階の意味論的帰結を “ 完全に ” (completely) 捉えているのである。ゲーデルは学位論文にこの結論を書き，そのためこれは 1 階論理の完全性定理 (Completeness Theorem) として知られている。

22. 理論 T の**モデル**とは，T の公理をすべて真にする解釈のことである。“ 解釈 ” については第 IV 部の第 2 章の『レーベンハイム–スコーレムの下降定理』の節を参照せよ。「T のモデル M がある」「T はモデル M をもつ」「T は解釈 M で真」などはす

べて同じ意味である。

23. この証明には非有限的な集合論，特に選択公理が使われている。また，形式的な算術や解析学や集合論のモデルは無限的な対象物であろう。無矛盾性が存在を導くと主張していた 1900 年頃のヒルベルトにはこれらはすべて受け入れられるものだったのだろうが，これは 25 年後にヒルベルトが信奉する有限主義とは調和しないものである。

24. DPA の説明は第 I 部の第 2 章の『自然数』の節を参照せよ。デデキント–ペアノ算術はしばしばペアノ算術とよばれ PA と書かれる。ここでは，デデキントに当然の名誉を与えるためだけではなく，(PRA と PA との) 混乱を避けるために，通常と違うよび方をする。

25. 「自然数の任意の集合」はここで意図されている解釈の対象領域の部分集合であり，R は 2 階変数の条件どおり対象領域の部分集合を値とする。なお，これは正整数ではなく自然数に関する理論である，ということを強く主張する必要はない。歴史的には DPA は正整数の算術の理論であった。Dedekind (1888)，Peano (1889) を参照。

26. Dedekind (1888)．これは 2 階 DPA の範疇性として知られている。2 つのモデルが同型であるとは，その間に構造を保存する全単射があることである。1 階の理論についてはこのような定理は成り立たない。それどころか，もしもある可算言語の 1 階理論が無限集合を対象領域とするモデルをもてば，その理論は任意の無限濃度の対象領域のモデルをもつ (これがレーベンハイム–スコーレムの定理である)。したがって，無限モデルをもつ 1 階理論で範疇的なものはない。

27. 実際，$\mathfrak{N}$ が T のモデルであるという仮定で T は ω 無矛盾である。なぜなら，$\varphi(\mathbf{n})$ という形のすべての論理式が $\mathfrak{N}$ で真であるならば，$\neg\forall x\varphi(x)$ は $\mathfrak{N}$ で偽になるからである。

28. 仮に $\mathrm{T}+\neg\gamma$ が矛盾したとする。これは矛盾 $\chi\&\neg\chi$ が $\mathrm{T}+\neg\gamma$ で導出できることを意味する。すると命題論理 (これは T の一部分である) の背理法の法則によって T における $\neg\neg\gamma$ の導出が得られ，さらに二重否定除去の法則によって T における γ の導出が得られてしまう。[訳注：「$\mathrm{T}+\neg\gamma$ が矛盾を導く」から「T は γ を導く」を出すことを背理法とよべば，二重否定の除去は必要ない。]

29. 実数の 2 階の理論は 2 階の DPA と同様に範疇的であり，PRA が組み込まれている。したがって，意図している標準モデル $\mathfrak{R}$ の存在を前提にすれば，2 階の DPA をこの理論に代え，$\mathfrak{N}$ を $\mathfrak{R}$ に代えることにより同じ議論が展開できる。ゲーデルは学位論文の序論で，不完全性の可能性を検討し，2 階の実数論の範疇性を使ったこのような議論をほのめかしている (ただし 1 階と 2 階の理論の決定的な違いにはふれていないが)。

30. この主張の擁護は Shapiro (1991) を参照。

31. 有限的算術は真である，ということは前提としている。したがって形式体系 S は無矛盾である。Tait (1981) は，有限的算術とは PRA のことである，と論じている。

もしそうならばSはPRAの形式体系であろう。

32. もしも，第IV部の第3章で示唆したように，有限的全称文の正しさというものが，「それ自身の真理」ではなく「変数に値を代入して得られるすべての具体例の真理」にあるのならば，ここはいい換える必要がある。正しい有限的な言明であるということは，それが厳格に有限的な文で真であるか，すべての具体例が真であるような有限的全称文ということであるが，第一導出不能性定理が示したことは，その正しさを導出可能性という安全なシンタクティックな特徴で捉えることはできない，ということである。

33. Kreisel (1976) と Smorynski (1989) がこれを論じている。

34. 実際，Sで導出できない真な有限的全称文は無数にある。δはその否定をSで導出できないので，Sに公理としてδを追加して得られる新しい体系$S+\delta$は無矛盾である。したがって，この$S+\delta$に対するゲーデル文δ^1は$S+\delta$で導出できないので，Sでも導出できない。同様に続けていけば，一般に$S+\delta+\cdots+\delta^n$に対するゲーデル文δ^{n+1}はSで導出できないことが帰納的にいえる。[訳注：このδ^1，δ^{n+1}などは“ゲーデル文”ではなく“ロッサー文”であろう。]

35. Detlefsen (1990).

36. 有限的な文は有限的全称文も含む。他の文脈では「文」という言葉は「自由変数を含まない論理式」の意味に使われるので，その場合は有限的な文に全称文は含まれない。

37. Sは無矛盾であり真である。さらに，$\neg\forall x\varphi(x)$といった記号列は有限的な論理式ではないので，Sは明らかにω無矛盾である。[訳注：この注37は不自然に思える。「$\neg\forall x\varphi(x)$はSで扱える記号列ではないので導出不可能であり，したがってSはω無矛盾である」と論じているようだが，そもそも，このような形の論理式を扱えない体系に対してゲーデル文を考えることは，不自然ではないだろうか。]

第2章

1. これ以降,「コード上で」というただし書きは省略する。

2. neg(x)は原始再帰的関数であり，TはPRAを包含しているのでこの関数を表現できる。

3. ここで扱う体系はすべてPRAを包含している。したがって，数項や基本的な算術演算で構成された項による真な等式や，そのように構成された偽な等式の否定は，すべて導出できる。さらにこの体系は古典命題論理および古典述語論理の法則をもっている。これらにより，体系の無矛盾性のこのようなさまざまな解釈が同等であることが保証される。

4. Boolos and Jeffrey (1974: 187) や Smorynski (1977: 827) を参照。第二導出不能性定理を初めて実際に証明したのは，聞くところによるとベルナイスである (Hilbert and Bernays 1939). ゲーデルは証明の概略を与えただけで，可導性条件の定式化

はしなかった。Jeroslow (1973) には次が示されている。自分自身の導出不能性を表出した文の代わりに自分の否定の導出可能性を表出した文を使えば，量化詞をもつ体系 T に対してベルナイスの可導性条件の中の 2 つは落とせる。可導性条件のもっとも整理された定式化で，形式的な証明可能性の一般論の研究にもっとも便利なものは，Löb (1955) による。

5. 数理論理学の教科書によっては，その教科書での T 導出論理式が可導性条件を満たすことの証明をまったく与えていないものもある。Monk (1976, ch.17) では証明されている。[訳注：田中一之編『ゲーデルと 20 世紀の論理学』第 3 巻の鹿島の解説を参照。]

6. モーダス・ポーネンス (Modus Ponens，分離規則 (Detachment) ともよばれる) とは，前提 $\{A, A \to B\}$ から結論 B を導く規則である。

7. 数理論理学のいくつかの教科書 (例えば Monk (1976) や Boolos and Jeffrey (1974) など) には，第二導出不能性定理に対する異なる議論がある。それはレーブの定理 (Löb 1955) を用いている。

8. Feferman (1989).

9. 詳細は本章の補遺をみよ。Feferman (1960) は外延的な定理と内包的な定理とを区別し，第二導出不能性定理の内包性を示した。導出不能性定理に関する外延／内包の差異については Auerbach (1985) で詳しく論じられている。

10. Detlefsen (1986). この問題を綿密にみることをデトレフセンにより強いられるまでは，筆者は (おそらく他の人も) オーソドックスな見方を無批判に受け入れていた。

11. このアイデアは Rosser (1936) までさかのぼる。無矛盾性保証付き体系に関する新しい話題は Visser (1989) を参照せよ。

12. 注 4 を参照。

13. 「どれか」とは，ジェロスローが改良した証明においても依然として必要な，可導性条件の一つのことである。

14. 文 α と文集合 Γ が無矛盾であるとは,「ある文とその否定の両方が，$\Gamma \cup \{\alpha\}$ からもってきた仮定から T の推論規則を使って導出できる」ということが起こらないことである。

15. Feferman (1960) は,「T の公理である」という性質を T において表出はしていないが再現している述語 $A^{\star}{}_{T}(x)$ を考案した。そして,「$T^{\star}$ の公理である」という性質が $A^{\star}{}_{T}(x)$ によって表出され，その他は T と同じような体系 $T^{\star}$ が，フィファーマン体系になる (補遺参照)。

16. 「1 変数述語記号しか使わない」という制限はつけない一般の 1 階述語論理の言語で，これは成り立つ。この事実は,「1 階述語論理の恒真性を判定するエフェクティブな方法は存在しない」というチャーチの定理と,「1 階述語論理の恒真性と証明可能性は一致する」という事実から導かれる。

17. これは Feferman (1960) が指摘している。変則的な形式体系の研究は，例えば，理

論 (導出に関して閉じている文集合) 間の関係についての情報を与えるといった役だち方が可能だ，と彼は示している。さらに彼は，T^F の背後にあるアイデアを使って，理論内部での無矛盾性証明の可能性はその理論の “ 提示の仕方 ” に決定的に依存する，ということを示した。数学が形式的に提示される際には方法がいかに重要であるか，ということを示して，Feferman (1982, 1989) は,「何が形式的理論の標準的な提示方法とよべるか」ということに説明をつける道を切り開いた。

18. T^R は Rosser (1936) による形式体系の提示方法の改造型である。

19. β が $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ から導出でき，各 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ がそれぞれの相反する文よりも前に公理から導出される (すなわち，δ_i の導出 η_i が存在し，η_i より e の順序で小さいどんな導出の結論も δ_i と相反しない) としても，公理だけを前提に使って β に相反する文よりも前に β が導出できる，とは保証されない。

20. ロッサー体系は，理論に矛盾が発見された場合の次のような対処法を含んだ現実または想像上の行動を形式化したもの，と考えられるかもしれない。「認知の度合が弱くなっていく順番に導出が並べられているならば，その順番で先に登場していたものに矛盾するような導出は捨ててしまう」(Detlefsen 1986: 120-3 を参照)。しかしこの示唆の価値が何であろうとも，これは話題のすり替えになっていると思う。ヒルベルトのプログラムは，算術や解析学や集合論の実際の理論の無矛盾性 (など) を示すことを目指しており，それは，仮にそれらの理論に矛盾が発見されたらどのように対処するか／対処すべきか，ということとは関係ないのである。またそれとは別に，矛盾の発見に正しく対処する方法が形式化できるか，というのは疑問である。ロッサー体系がそれをするものでないことは確かである。なぜなら，もしも相反する結論をもつ証明らしきものがみつかって理論の矛盾が発見されたら，そこでの論理や公理を見直すことなく単にどちらかの証明候補を切り捨てて進んでいく，などということはしないだろうし，すべきでないからである。

21. 考案者への公平を期すために，次のことをいっておかなければならない。このような非標準的体系は，ヒルベルトのプログラムの救済を目的として考え出されたのではなかった。

22. Gödel (1972*b*). Gödel (1990: 282-7) にあるフィファーマンによる紹介文も参照せよ。

23. T が**外部無矛盾**であるための必要十分条件は，T で導出可能な原始再帰的項による等式で「偽であるもの」や「等式計算の以下の規則 (i), (ii) を適用して偽な代入結果が得られるもの」は存在しないことである。(i) 自由変数へ原始再帰的項を代入する。(ii) ある原始再帰的項をそれとの等しさが T で導出された別の項に置き換える。原始再帰的項とは，大ざっぱにいって，数項であるか，すべての自由変数に数項が代入されれば全体の値 (の数項) が計算できるような項である。

24. これは T の Π^0_1 反映ともよばれる原理である。Π^0_1 文と有限的文とは同じである。

25. 技術的な変更とは，証明が可導性条件 $\mathrm{Prov_T}(\ulcorner\alpha\urcorner) \rightarrow \mathrm{Prov_T}(\ulcorner\mathrm{Prov_T}(\ulcorner\alpha\urcorner)\urcorner)$ を使

わずにすんでいることである。(大ざっぱにいって) この可導性条件が第二導出不能性定理の証明において本質的であり，非標準的体系においては成り立たないものである。[訳注：フィファーマンのいう「技術的な変更」とは,「literal Gödel sentence の使用」(Gödel 1990: 285) のことではないかと思う。]

26. Gödel (1931). Gödel (1986: 195) も参照。

27. ゲーデルの考えは，以下の一連の講演や文章にその発展の跡をたどることができる。Gödel (*1933*o*, *1938*b*, *1941, 1958, 1972*a*) (* は遺稿から)。

28. Gödel (1990: 273) の中の Gödel (1972*a*)。Gödel (1990: 241, 242) の中の Gödel (1958) と比較せよ。

29. Gentzen (1936, 1938). この無矛盾性証明において使われた手法は，ε_0 までの帰納法の他はすべて有限的である，と主張する根拠は，Gentzen (1936: §§7-11, 16) で与えられている。

30. Hilbert and Bernays (1939: §§5, 3c). Gentzen (1943: §2) は，α までの帰納法 (ただし $\omega \leq \alpha < \varepsilon_0$) の証明が数論の形式体系でどのように形式化できるかを示している。

31. Gentzen (1938: §4.4).

32. Gödel (1990: 273) の中の Gödel (1972*a*).

33. 「ε_0 までの帰納法は数論では証明不可能である」ということのゲンツェンによる直接証明 (Gentzen 1943) が，この方向のさらなる証拠である。

34. Tait (1981).

35. これは " 有限的 " 言明に関する信頼性，すなわち，偽であり有限的な定理は存在しない，ということである。

36. Heyting (1930).

37. Gödel (1933). ゲーデルとは独立に，同じ定理がゲンツェンとベルナイスによって 1933 年に証明された。

38. ここで認知とは感覚によるものでなければならない。感覚の想像を除外するかどうかは明らかではない。

39. これについては Gödel (*1933*o*, *1941) を参照。

40. Martin-Löf (1984). これは 1980 年 6 月の Padua での講義の，G. サンビンによるノートである。直観主義的型理論は，1970 年代にマーチンレーフの仕事ではじまり，計算機科学者によって用いられてきている。これが数学の直観主義哲学の要求をどの程度満たしているかは，筆者は知らない。

41. これは一般に「直観主義算術のゲーデルによるダイアレクティカ解釈」(最初に発表された雑誌名に由来する) (Gödel(1958)) とよばれており，" D " はダイアレクティカ (Dialectica) の頭文字である。Gödel (1972*a*) は，Gödel (1958) と同じものに脚注を大幅に加え，アイデアの洗練や説明をしたものである。もともとのアイデアについては Gödel (*1941) を参照せよ。直観主義算術を経由する古典算術の無矛盾性

の同様な証明については Shoenfield (1967) ch.8 §3 を参照せよ。ゲーデルの手法を拡張した解析学の無矛盾性証明については Spector (1962) と Luckhardt (1973) を参照せよ。

42. すなわち，直観主義算術に対する相対的無矛盾性証明によるよりも D に対する相対的無矛盾性証明によるほうが，古典算術の無矛盾性がより確からしくなった。

43. ヒルベルトがこの事実を受け入れたことがあったかどうかは疑問であるが，ヒルベルト学派の一番手であるベルナイスは確かに受け入れていた。Hilbert and Bernays (1934) の序文において，ヒルベルトは次のように述べている。「ゲーデルの結果は，より広い体系の無矛盾性の有限的証明を得るためにはより鋭い手法が必要であることを示している。」ベルナイスの態度については Bernays (1935, 1941, 1954) を参照せよ。ベルナイスは，非有限的な無矛盾性証明には認識論的な価値はありうるとみなし，1935 年には,「非有限的な体系の無矛盾性」を「無矛盾性がよりもっともらしい非有限的体系の無矛盾性」に還元する有限的証明を得ること (相対的無矛盾性) が進むべき道であると考えていた。

44. Mostowski (1966:24).

第Ⅵ部

第 1 章

1. Zermelo (1930).

2. Gödel (*1933*o*) と Gödel (1947) でこの違いを比較せよ。

3. 層の列 S は，S に属する任意の層 V, W について，S において W が V の次にくることと W が V の次の層であることが同値であるとき，層の**連続**した列という。

4. 累積階層のアイデアは von Neumann (1929) によっても定式化されている。

5. この点について，ゲーデルは次の脚注をつけている。「この“反復適用”という言葉は，超限的な繰り返しを含む。つまり，有限の繰り返しで得られる集合の総体はそれ自身 集合とみなすことができ，さらに“～の集合である”という操作をする土台となる。」これは Gödel (1947) の脚注 12 であり，また Gödel (1964) の脚注 13 である。Gödel (1964) は， Gödel (1947) を改訂，拡張したものであり，Gödel (1990:254-70) に再録されている。ここでは省略したが，もう 1 つの脚注が，引用文の数語後に記されている。

6. Gödel (1947, 1964).

7. Scott (1974).

8. V が W より下ではないとすると，W は V であるか V より下にある。つまり，$W = V$ もしくは $W \in V$ である。したがって，$V \notin W$ である。なぜならば，もしそうでないとすると， $V \in V$ もしくは $V \in W \in V$ となってしまうからである。ゆえに，

V ∈ W ならば V は W より下にある。

9. 累積原理を用いない整列性の証明は Potter (1991: ch.1) にある。

10. Mirimanoff (1917) は要素関係による無限下降列のない集合 (整列集合) を研究した最初の人である。彼は，すべての集合が整列可能であるとは主張しなかったが，整列でない集合は例外的なものであると考えていた。

11. 階層は整列順序をなすので，それらは順序数によってさし示される。集合 m のランクは，m がその部分集合となる最下位の層をさし示す順序数である。よって，α が m のランクならば m のレベルは $\mathrm{V}_{\alpha+1}$ である。ランクは超限再帰的に，$\mathrm{rank}(m) = \cup\{\mathrm{rank}(p) + 1 : p \in m\}$ と定義される。

12. 対立的な見解としては Cohen (1971) を参照。

13. 構成主義の一つであるブラウワーの直観主義は選択公理を認めている。しかし，量化記号表記の直観主義的な意味に従えば，直観主義的な選択公理は古典的な選択公理ときわめて異なる構成的原理である。Dummett (1977; ch.2 §4) を参照。

14. 例をあげて説明すると次のようである。各正の整数 n について，$f(n)$ を $[(n+1)!/2\times(n-1)!]$，$g(n)$ を $1+2+3+\cdots+n$ とする。$[(n+1)!/2\times(n-1)!] = 1+2+3+\cdots+n$ なので，この観点からすれば，関数 f と g は同じものである。

15. Zermelo (1930). Fraenkel (1922) と Skolem (1922*a*) がこの公理に対応するものをすでに提案していた。

16. Lévy (1960*a*, *b*). Bernays (1961) も参照。

17. 非形式的な反映原理についてのゲーデルの発言の報告は Wang (1974: 189) を参照せよ。

18. まず公理図式を述べる前に論理式 θ の集合 Y への相対化という手法を紹介しよう。集合 Y に対して，θ の存在的部分論理式 $\exists x\varphi$ を $\exists x(x \in \mathrm{Y} \,\&\, \varphi)$ に，全称的部分論理式 $\forall x\varphi$ を $\forall x(x \in \mathrm{Y} \to \varphi)$ に，それぞれもっとも内側にある部分論理式から順に置き換えていって得られる論理式を，θ の Y への相対化といい，θ^{Y} で表す。θ^{Y} が真であることは，θ が，Y を領域にもち，記号 $\in$ の解釈が Y に制限された要素関係であるモデルで真ということである。いま，θ は高々 n 個の自由変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をもつとする。このとき，反映原理とは次の公理図式をいう。

$$\forall\alpha\exists\beta[\beta > \alpha \,\&\, \forall x_1 \ldots \forall x_n(x_1 \in \mathrm{V}_\beta \,\&\, \ldots x_n \in \mathrm{V}_\beta \to [\theta \leftrightarrow \theta^{\mathrm{V}_\beta}])].$$

小文字のギリシア文字は順序数を動く変数であり，V_β は β 番目の層である。順序数や層を用いない表し方もある。$\mathrm{S}(y)$ を「y は集合である」こととし，$\mathrm{St}(x)$ は $\forall y \in x[\mathrm{S}(y) \to (y \subseteq x \,\&\, \forall z[z \subseteq y \to z \in x])]$ の略とする。(これを x は超推移的であるという。)　すると反映原理は次のように表せる。

$$\forall a\exists b[a \in b \,\&\, \mathrm{St}(b) \,\&\, \forall x_1 \ldots \forall x_n(x_1 \in b \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in b \to [\theta \leftrightarrow \theta^b])].$$

19. Lévy (1960*a*, *b*, 1962).

20. Gödel (1938). 証明は Gödel (1940) にある。ここで，ゲーデルは選択公理 (AC) と一般連続体仮説 (GCH) を，このような無矛盾な公理群に加えても無矛盾であること

も示している。GCH とは $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ という主張である。その証明法は，公理を満たすどんな集合のユニバースも内部モデルとして構成的階層をもち，そこでは AC も GCH も成り立つことを示すことであった。用いられた公理系は NBG として知られるもので，集合論の言語で表される文に関して，ZF と同等なものである。ZF の公理は，外延性公理，合併の公理，ベキ集合公理，置換公理，無限公理からなる。NBG はフォン・ノイマン (von Neumann)，ベルナイス (Bernays)，ゲーデル (Gödel) の頭文字をとったものであり， ZF はツェルメロ–フレンケル (Zermelo-Fraenkel) の頭文字をとったものである。

21. Cohen (1963). 完全な解説は Cohen (1966) にある。コーエンは集合論の公理を満たす可算モデルを，AC と CH を成り立たせないモデルに拡張する方法を示した。この結果，集合論の公理の無矛盾性を仮定すれば，AC と GCH はその公理から独立であることがわかる。

22. Robinson (1965)，もしくは Robinson (1969) を参照。

23. Cohen (1971). これは 1967 年の講演をもとにしたものである。

24. 集合論の言語のシンタックスのコード化は，自然数の代わりに遺伝的有限集合を用いてなされる。(遺伝的有限集合は，$n \in \omega$ に対するレベル V_n の集合のことであり，対応する有限木をともなう集合と考えることができる。) よって，集合論の公理の (ω) 矛盾性を仮定すれば，ゲーデルやロッサーの論法に従って，遺伝的に有限集合についての文で，集合論の公理から独立なものを構成できる。

25. ここでいう公理は，到達不能基数，超到達不能基数，マーロ基数，超マーロ基数の存在を主張する公理のことである。これらはすべて，ZFC に可測基数の存在を主張する文 M を加えて導かれる。Lévy and Solovay (1967) は，ZFC + M が無矛盾ならば，CH は ZFC + M の独立命題であることを示した。ZFC は ZF に選択公理を付け加えたものである。(ZF については，注 20 を参照。) 一方，ZF のモデルの存在を主張する集合論の文は (ZF の無矛盾性のもとで) ZF の独立命題であるが，ZF に到達不能基数の存在を主張する文を加えれば導かれる。ここで述べたような基数についての定義は，Drake (1974: ch.4, ch.6) を参照されたい。

26. Easton (1970) は，$\aleph_{G(\alpha)} > \aleph_\alpha$ という条件だけを満たす正則基数から順序数への任意の増加関数 G(α) に対して，ZFC が無矛盾ならば $\forall\alpha[2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{G(\alpha)}]$ という仮説を ZFC に加えても無矛盾であることを示した。

27. 理論 T の言語の文 φ は T の任意のモデルで真であるとき，T の‘意味論的帰結’という。

28. ここで，2 階の ZF はモデルをもつと仮定している。ツェルメロの集合論のユニバースは，到達不能基数 α によって V_α の形で表せる。2 階の ZF のすべてのモデルは，このような V_α のいずれかと同型であり，CH はそのような最小の V_α ですでに決定されている。NBG のモデルについても対応する定理がある (Zermelo (1930), Shepherdson (1952)). 無限順序数 α で，α より小さい順序数の α 未満個のどんな

和も α より小さく，α より小さい任意の順序数 β について $2^{|\beta|}$ (の順序数) より α のほうが大きくなるものは到達不能という。ユニバースは本来2階の概念であり，それゆえ，1階公理系では潜在する考えを表現するにはあまりにも弱い，ということはありそうである。

29. この点に関する解説として Bell (1985) に含まれるスコットによる序文と Shapiro (1991: ch.5) を参照せよ。

30. Weston (1977). ここに矛盾はない。2階論理において，2階理論の意味論的帰結のすべてを2階理論から導出できるわけではない。

31. Robinson (1965) はこう言っている。「プラトン主義的な見解をもちながら，正しいけれども知ることのできない数学的事実があるかもしれないという考えを受け入れる数学者は非常に少ない。」 彼がその考えを受け入れていないのは明らかである。

32. ツェルメロの見解を受け入れる者は，基数に関するいくつかの問題は，異なるユニバースによって異なる答えがあることを受け入れなくてはならない。例えば，到達不能基数が存在するだろうか。しかし，ここでの議論のもとでは，連続体の問題のような基数に関する問題はより局所的な特徴をもち，その中でそれらのありうる答えは有界量化記号によって定式化できる。ツェルメロの見解においてさえ，これらの問題が決定的な答えをもつことは期待できるかもしれない。

33. Mostowski (1972) は (ii) の立場をとり，クライゼルに徹底的に批判されている。モストフスキの議論，クライゼルの反論，モストフスキの返答は，1965年に開かれた会議の会議録の一部として，Lakatos (1972) にある。また ロビンソンの注，Bernays (1972) の論文，これらの事柄に関する後の議論も，すべて同じ論文集に収められている。

34. これに関する見通しとして Bell (1985) におけるスコットの序文を参照。

35. 形式体系 { 外延性公理，基礎の公理，分離公理，反映公理，選択公理 } は ZFC + AF として知られる体系と同値である。(ZF については注25を参照。) AF は基礎の公理の略である。1階の理論において，分離，反映，置換は公理図式として定式化され，それらの事例がそれぞれ公理である。反映原理と他の公理との間の証明可能性に関するよい解説として Gloede (1976) がある。

第2章

1. Zermelo (1930).

2. Zermelo (1930).「超有限的二律背反」はクラスパラドクスであり，モデルにおける「非集合」は真のクラスである。ツェルメロが「集合論自身」はモデルの制限のない列として表せるというとき，著者は集合論の主題がそのように表現できるといっているのだと解釈している。

3. 窃盗にあって「箱の中のすべてのものが盗まれた」と主張したとしよう。もし箱の中に古いほこり粒をみつけてもこれは否定できないだろう。しかし，もし法廷の取

調官が「箱の中のすべてのものは非有機起源をもつ」と報告した場合，ほこり粒の間に死んだ皮膚細胞がみつかれば，論破されるだろう。そのとき，ほこり粒が「物」として扱われるかどうかは状況による。

4. Zermelo (1930). V がユニバースであることと $\langle V, \in_V \rangle$ が ZFC + AF の 2 階のバージョンのモデルであることは同値である。そのようなユニバースは強到達不能順序数 α によって層 V_α と表せる。(α より小さい順序数の $|\alpha|$ 個未満のどんな和も α より小さく，α より小さい任意の順序数 β について $2^{|\beta|} < |\alpha|$ となる無限順序数 α を**強到達不能**であるという。$|\delta|$ は δ に先行する順序数全体の基数である。) ユニバースがその要素としてあるユニバースをもつことと，到達不能順序数をもつこと，つまり，到達不能な層をもつことは同値である。任意の β に対して，β より大きい到達不能な α が存在するという主張を**到達不能公理**という。到達不能公理を満たすユニバースは，ユニバースの非有界列をもつ。
5. 筆者の判断では，すべき注意がなされていない一般的な現象がある。(ラッセルの「型の多義性」がその例になろう。) それを述べるためには意味論における適切な基礎が必要である。それはまったく脇道にそれることになるのでここでは省略する。
6. Tarski (1944), Parsons(1974), Kripke (1975), Burge (1979).

第 3 章

1. 同じ命題に対しても異なる文脈おいては異なるレベルの合理的信用を同時にもつことができる。懐疑的態度の探求を続けていけば，現象に一致する物質的な対象の存在を疑わなければならない。他方，いまの不安を減らす方法を同時に探求するならば，そのような懐疑は普通ばかげている。
2. Hilbert (1929,1931).
3. ϵ_0 は，$\omega^\alpha = \alpha$ となる最小の順序数 α のことである。

$$\forall\beta < \alpha[[\forall\delta < \beta P(\delta)] \rightarrow P(\beta)] \quad \therefore \quad \forall\beta < \alpha P(\beta)$$

という規則を，α までの帰納法という。ここでの文脈において，P は決定可能な量化記号のない述語のことである。記号を用いない説明として，第 V 部の第 2 章における「有限的推論の問題」(p.221〜) を参照。

4. この仕事の詳しい解説は，Schütte (1977), Takeuti (1987), Pohlers (1989) にある。
5. Feferman (1988*a*, 1993*a*) のこの事柄についての論説も参照せよ。
6. 逆数学はフリードマンによってはじめられ，シンプソン，その他の人々によって研究が続けられている。Simpson (1985) を参照。Simpson (1988) で逆数学とヒルベルトプログラムの関係が説明されている。[訳注：田中一之編『ゲーデルと 20 世紀の数学』第 3 巻にある山崎の解説も参照。]
7. フリードマンは非有限の立場でよりよい結果 (すなわち，WKL_0 は PRA の Π^0_2 文に関する保存的拡大である) を得た。また，Sieg (1985) は有限の立場の証明を与えた。

Simpson (1988) は，WKL_0 を強くしたものについても同様の結果を示している。

8. これらの発見の多くはシンプソンとその仲間によってなされた。具体例と参考文献については，Simpson (1988) を参照。

9. Feferman (1988*a*, 1993*a*).

10. Feferman (1988*a*) にテクニカルに正確な定義がある。

11. 数字と原始再帰的定義による関数のために，関数記号からつくられた項のこと。

12. この文句を次のように論理的に書き直すと，量化詞を使う文面において，全体について言及していることが明らかになる．「$y \neq x$ である任意の惑星 y に対して，x は y より大きい」ことが成り立つ惑星 x.

13. 書き直すとこうである。性質 P をもつ任意の自然数の集合 y に対して，y に含まれ，性質 P をもつ自然数の集合 x.

14. Poincaré (1913)，Weyl (1918)．クロネッカーは「神が整数をつくったが，他の数は人のなした仕事である。」と言ったといわれている。

15. W の解説は Feferman (1988b) を参照。

16. Feferman と Jäger (1993, 1996).

17. Weyl (1918).

18. これは第 IV 部の第 2 章のワイルに関する項で概説されている。Feferman (1988*b*) に従って，もう少し細かくみてみよう。実数は左デデキント切断で定義する。S を性質 P によって決まる上に有界な実数の空でない集合とする。S の上限は $\mathrm{Sup(S)} = \{q : q \in \mathbb{Q} \,\&\, \exists r(\mathrm{P}(r) \,\&\, q \in r)\}$ で定義される。ここで，$\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合であり r は実数全体を変域にもつ変数とする。S の上限は r の変域に入るので，これは非可述的である。さて，$\mathbf{r}$ を上に有界な実数の空でない列で，次の関係 R によって決まるものとする。すなわち，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$q \in \mathbf{r}_n \Leftrightarrow \mathrm{R}(q,n)$ とする。$\mathbf{r}$ の上限は $\mathrm{Sup}(\mathbf{r}) = \{q : q \in \mathbb{Q} \,\&\, \exists n(\mathrm{R}(q,n)\}$ で定義される。ここで，$\mathrm{Sup}(\mathbf{r})$ は実数であるが，定義の中に実数の変域の変数がないので，これは可述的である。有理数全体を並べたもの q_m $(m \in \mathbb{N})$ を使い，各 q_m を m と同一視すると，$\mathrm{Sup}(\mathbf{r}) = \{m : \exists n(\mathrm{R}^*(m,n)\}$ という形で，純粋に算術的な定義になる。この集合の存在は W の算術的内包公理 $\exists a \forall n[n \in a \leftrightarrow \varphi(n)]$ から得られる。ただし，$\varphi(x)$ は x だけを自由変数にもつ算術的文であり，n は自然数全体を変域にもつ変数とする。

19. Feferman (1988*a*, 1993*b*)．Feferman (1998*a*) で 1988*b* (=ch.13) の再録にあとがきが加えられ，予想についてさらに議論されている。

20. Parsons (1983).

21. Feferman と Hellman (1995).

22. 道具主義に徹すれば解析学全体や集合論の信頼性を確立する必要はない，とデトレフセンは指摘する。それらが道具として役立つ範囲で考えればよく，とても長くて複雑であったり，非常に難解で発見しにくいような証明は除外してよい。そして，デトレフセンは次のようなプログラムを提案する。道具として有用な証明であるための

数学的基準をみつけよ。そして，その基準を満たす非有限数学が有限的に信頼できる (finitary-reliable) ことを有限的手法を用いて示せ (Detlefsen: ch.5, 1990: n.24)。(デトレフセンはこれをヒルベルトのプログラムであるといっているが，デトレフセン自身に帰せられるべきである。) このプログラムが追求されてきたかどうか，あるいは実行可能であるかどうか，筆者にはわからない。道具として有益なものの限界に関するどんな提案も経験的な根拠に基づかなくてはならないだろう。それゆえ，若干の不確かさは避けられないが，これは取るに足りないことかもしれない。また，有限的算術に還元できることがわかっている理論の範囲を超えた解析学の一部の信頼性を確立することは可能かもしれない。

23. 非構成的数学の構成的数学への還元について言及しなかった。この領域でどれくらいのことが達成されたか判断することができないからである。古典算術から直観主義算術へのゲーデルの「二重否定」による翻訳を拡張して，解析と集合論の形式化を直観主義論理上のそれらの対応物に還元することもなされてきた。しかし，たとえ直観主義論理が構成的に正当であるとしても，これらの対応物はそうではない。解説と参考のために Troelstra (1986) を参照せよ。Feferman (1988*a*: §8) には翻訳によらない構成的なものへの還元について述べられ，参考文献もあげられている。

24. Russell (1956*b*).

第 4 章

1. Bishop (1967), Bishop and Bridges (1985); もしくは Beeson (1985). 構成主義の哲学的な基礎については，Dummett (1975); Wright (1985) を参照せよ。

2. 入門として McLarty (1992) と MacLane and Moerdijk (1992) を参照。

3. 例えば，Apostol と Rudin (1964) を参照せよ。すべての解析学の教科書が実数の定義をしているわけではないが，初歩的な点集合論は標準的なアプローチに不可欠である。

4. Robinson (1966). Machover and Hirschfeld (1969) と Bell and Machover (1977: ch.11) はより多くの題材を含む解説である。有益な入門書としては Keisler (1976) がある。

5. 解説書に Kock (1981) と Bell (1985) がある。

6. 最近の成果については Butterworth (1999) と Dehaene (1977) を参照。

参考文献

Abel, N. (1881). *Oeuvres complètes*, 2 vols, ed. L. Sylow and S. Lie. Christiana: Grøndahl.

Apostol, T. (1957). *Mathematical Analysis*. Reading, Mass: Addison-Wesley.

—— (1967). *Calculus*, 2nd edn. New York: John Wiley.

Auerbach, D. (1985). Intensionality and the Gödel theorems. *Philosophical Studies* **48**, 337–51.

—— (1992). How to say things with formalisms. In Detlefsen (1992).

Baire, R., Borel, E., Hadamard, J., and Lebesgue, H. (1905). Cinq lettres sur la théorie des ensembles. *Bulletin de la Société Mathématique de France* **33**, 261–73; trans. by G. Moore in an appendix of Moore (1982) and reprinted in Ewald (1996).

Beeson, M. (1985). *Foundations of Constructive Mathematics: Metamathematical Studies*. Berlin: Springer-Verlag.

Bell, J. (1985). *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*, 2nd edn. Oxford: Clarendon Press.

—— (1998). *A Primer of Infinitesimal Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

—— and Machover, M. (1977). *A Course in Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland.

Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.) (1964) *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall; 2nd edn. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

Berkeley, G. (1734). *The Analyst; or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*. In A. Luce and T. Jessop (eds.), *The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne*, vol. 4. London: Nelson, 1948–57.

Bernays, P. (1930*a*). Die Grundgedanken der Fries'schen Philosophie in ihrem Verhältnis zum heutigen Stand der Wissenschaft. *Abhandlungen der Fries'schen Schule* **5**, 99–113.

—— (1930*b*). Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie. *Blätter für Deutsche Philosophie* **4**, 326–67; trans. in Mancosu (1998*a*).

—— (1935). Sur le platonisme dans les mathématiques. *L'Enseignement mathématiques* **34**, 52–69; trans. in Benacerraf and Putnam (1964).

—— (1941). Sur les questions méthodologiques actuelle de la théorie hilbertienne de la démonstration. In F. Gonseth (ed.), *Les Entretiens de Zurich, 6–9 Décembre 1938*. Zurich: Leeman.

—— (1954). Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung. *Revue internationale de philosophie* **8**, 9–13.

—— (1961). Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre. In Y. Bar-Hillel, E. Poznanski, M. Rabin, and A. Robinson (eds.), *Essays on the Foundations of Mathematics*. Jerusalem: Magnes Press.

—— (1972). What do some recent results in set theory suggest? In Lakatos (1972).

—— (1976). *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellshcaft.

Bishop, E. (1967). *Foundations of Constructive Analysis*. New York: McGraw-Hill.

—— and Bridges, D. (1985). *Constructive Analysis*. Berlin: Springer-Verlag.

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien des Unendlichen*. Liepzig: Reclam; trans. by D. Steele as *Paradoxes of the Infinite*. London: Routledge & Kegan Paul; partially reprinted in translation in Ewald (1996).

Boolos, G. (1971). The iterative conception of set. *Journal of Philosophy* **68**, 215–32; reprinted in Benacerraf and Putnam (1964), 2nd edn. 1983.

—— (1984). Iteration again. *Philosophical Topics* **17**, 5–12.

—— (1989). New proof of the Gödel Incompleteness Theorem. *Notices of the American Mathematical Society* **36**, 388–90.

—— and Jeffrey, R. (1974). *Computability and Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bos, H. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of the Exact Sciences* **14**, 1–90.

Brouwer, L. (1912). *Intuitionisme en formalisme*. Groningen: Noordhoff; trans. in Benacerraf and Putnam (1964).

—— (1918). Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen satz vom ausgeschlossenen Dritten: Erster Teil, Allgemeine Mengenlehre. *Koninklijke Akademie van wetenschappen te Amsterdam*, Proceedings of the Section of Sciences **12**, no. 5, 1–43.

—— (1919). Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen satz vom ausgeschlossenen Dritten: Zweiter Teil, Theorie der Punktmengen. *Koninklijke Akademie van wetenschappen te Amsterdam*, Proceedings of the Section of Sciences **12**, no. 7, 1–33.

—— (1928). Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. *Koninklijke Akademie van wetenschappen te Amsterdam*, Proceedings of the Section of Sciences **31**, 374–9; trans. in van Heijenoort (1967).

—— (1929). Mathematik, Wissenschaft und Sprache. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **36**, 153–64; trans. as 'Mathematics, science and language' in Mancosu (1998*a*).

—— (1952). Historical background, principles and methods of intuitionism. *South African Journal of Science* **49**, 139–46; reprinted in *L. E. J. Brouwer: Collected Works*, vol. 1, ed. A. Heyting. Amsterdam: North-Holland, 1975.

Browder, F. (ed.) (1976). *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*.

Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **28**. Providence, RI: American Mathematical Society.

Burali-Forti, C. (1897). Una questione sui numeri transfiniti. *Circolo Matematico di Palermo, Rendiconti* **11**, 154–64; trans. in van Heijenoort (1967).

Burge, T. (1979). Semantical paradox. *Journal of Philosophy* **76**, 269–98; reprinted with a postscript in Martin (1984).

Burgess, J. and Hazen, A. (1998). Predicative logic and formal arithmetic. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **39**, 1–17.

Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain*. London: Macmillan.

Cantor, G. (1883). *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre: Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig: Teubner.

—— (1887–8). Mittheilungen zur Lehre vom Transfiniten, I, II. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* **91**, 81–125; **92**, 240–65.

—— (1891). Über eine elementare Frage der Manngifaltigkeitslehre. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **1**, 75–8.

—— (1895). Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, 1. *Mathematische Annalen*, vol. 46; trans. in Cantor (1952).

—— (1897) Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, 2. *Mathematische Annalen*, 49; trans. in Cantor (1952).

—— (1899). Letter to Dedekind of 28 July, 1899; trans. in van Heijenoort (1967).

—— (1932). *Gesammelte Abhandlungen*, ed. E. Zermelo. Berlin: Springer.

—— (1952). *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, trans. by P. Jourdain, 1915. New York: Dover.

Chihara, C. (1973). *Ontology and the Vicious Circle Principle*. Ithaca, NY: Cornell University Press.

——(1990). *Constructibility and Mathematical Existence*. Oxford: Oxford University Press.

Church. A. (1976). Comparison of Russell's resolution of the semantical antinomies with that of Tarski. *Journal of Symbolic Logic* **41**, 747–60.

Cohen, P. (1963). The independence of the continuum hypothesis, I. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, **50**, 1143–8.

—— (1966). *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. New York: Benjamin Press.

—— (1971). Comments on the foundations of set theory. In D. Scott (ed.), *Axiomatic Set Theory*. Proccedings of Symposia in Pure Mathematics, **13**(1). Providence, RI: American Mathematical Society.

Cutland, N. (1980). *Computability*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dauben, J. (1979). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Davis, M. (ed.) (1965). *The Undecidable*. New York: Raven Press.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig: Vieweg; trans. as 'Continuity and irrational numbers' in Dedekind (1963); this translation is reprinted, with corrections, in Ewald (1996), vol. 2.

—— (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg; trans. as 'The nature and meaning of numbers' in Dedekind (1963).

—— (1963). *Essays on the Theory of Numbers*, trans. by W. Beman, 1901. New York: Dover.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense*. Oxford: Oxford University Press.

Detlefsen. M. (1986). *Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism*. Dordrecht: D. Reidel.

—— (1990). On an alleged refutation of Hilbert's Program using Gödel's First Incompleteness Theorem. *Journal of Philosophical Logic* **19**, 343–77; reprinted in Detlefsen (1992).

—— (ed.) (1992). *Proof, Logic and Formalization*. London: Routledge.

Diogenes Laertius (1925). *Diogenes Laertius: Lives of Eminent Philosophers*, with a translation by R. Hicks. London: Heinemann.

Dixon, A. (1907). On well-ordered aggregates. *Proceedings of the London Mathematical Society* **4**(2), 18–20.

Drake, F. (1974). *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals*. Amsterdam: North-Holland.

Dummett, M (1975). The philosophical basis of intuitionist logic. In H. Rose and J. Shepherdson (eds.), *Proceedings of the Logic Colloquium, Bristol, July 1973*. Amsterdam: North-Holland; reprinted in Benacerraf and Putnam (1964), 2nd edn 1984.

—— (1977). *Elements of Intuitionism*. Oxford: Clarendon Press.

—— (1991). *Frege: Philosophy of Mathematics*. London: Duckworth.

Easton, W. (1970). Powers of regular cardinals. *Annals of Mathematical Logic* **1**, 139–78.

Ewald, W. (1996). *From Kant to Hilbert*. Oxford: Clarendon Press.

Feferman, S. (1960). Arithmetization of metamathematics in a general setting. *Fundamenta Mathematicae* **49**, 35–92.

—— (1964). Systems of predicative analysis. *Journal of Symbolic Logic* **29**, 1–30; reprinted in Hintikka (1969).

—— (1982). Inductively presented systems and the formalization of metamathematics. In D. van Dalen, D. Lascar, and T. Smiley (eds.), *Logic Colloquium '80*. Amsterdam: North-Holland.

—— (1984*a*). Toward useful type-free theories, I. *Journal of Symbolic Logic* **49**, 75–111; reprinted in Martin (1984).

—— (1984*b*). Kurt Gödel: conviction and caution. *Philosophia naturalis* **21**, 546–62; reprinted in Feferman (1998).

—— (1986). Introductory note to *1931c*. In Gödel (1986).

—— (1987). Infinity in mathematics: is Cantor necessary? In *L'infinito nella scienza*, ed. G. Francia. Rome: Instituto della Enciclopedia Italiana; reprinted with minor corrections and additions in Feferman (1998).

—— (1988*a*). Hilbert's Program relativized: proof-theoretical and foundational reductions. *Journal of Symbolic Logic* **53**, 364–84.

—— (1988*b*). Weyl vindicated: *Das Kontinuum* seventy years later. In C. Celluci and G. Sambin (eds.), *Temi e prospettive della logica e della scienza contemporanee*, vol. I. Bologna: Cooperative Libraria Universitaria Editrice; reprinted with minor corrections and additions in Feferman (1998).

—— (1989). Finitary inductively presented logics. In R. Ferro *et al.* (eds.), *Logic Colloquium '88*. Amsterdam: North-Holland; reprinted with minor corrections and additions in D. Gabbay (ed.) *What Is a Logical System?* Oxford: Clarendon Press, 1994.

—— (1993*a*). What rests on what? The proof-theoretic analysis of mathematics. In J. Czermak (ed.), *Philosophy of Mathematics*. Proceedings of the Fifteenth Intternational Wittgenstein Symposium, Part 1. Vienna: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky; reprinted in Feferman (1998).

—— (1993*b*). Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics. In *PSA 1992*, vol. 2. East Lansing, Mich.: Philosophy of Science Association; reprinted in Feferman (1998).

—— (1998). *In the Light of Logic*. Oxford: Oxford University Press.

—— and Hellman, G. (1995). Predicative foundations of arithmetic. *Journal of Philosophical Logic* **24**, 1–17.

—— and Jäger, G. (1993). Systems of explicit mathematics with non-constructive μ-operator, I. *Annals of Pure and Applied Logic* **65**, 243–63.

—— —— (1996). Systems of explicit mathematics with non-constructive μ-operator, II. *Annals of Pure and Applied Logic* **79**, 37–52.

Fraenkel, A. (1922*a*). Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. *Mathematische Annalen* **86**, 230–7.

—— (1922*b*). Über den Begriff 'definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. *Sitzungsberichte der Preusischen Akademie der Wissenschaften, Physickalische–mathematische Klasse*, 253–7; trans. in van Heijenoort (1967).

—— Bar-Hillel, Y., and Lévy, A. (1973). *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North-Holland.

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Nebert; trans. in van Heijenoort (1967).

—— (1884). *Die Grundlagen der Arithmetic*. Breslau: Koebner; trans. as Frege (1950).

—— (1893). *Grundgesetze der Arithmetic*, vol. 1. Jena: Pohle; partial trans. in Frege (1964).

—— (1903). *Grundgesetze der Arithmetic*, vol. 2. Jena: Pohle; partial trans. in Frege (1952).

—— (1950). *The Foundations of Arithmetic*, trans. of Frege (1884) by J. Austin. Oxford: Blackwell.

—— (1952). *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, trans. by P. Geach and M. Black. Oxford: Blackwell.

—— (1964). *The Basic Laws of Arithmetic*, trans. by M. Furth. Berkeley and Los Angeles: University of California Press.

—— (1969). *Nachgelassene Schriften*, ed. H. Hermes, F. Kambartel, and F. Kaulbach. Hamburg: Felix Meiner.

—— (1980). *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Oxford: Blackwell.

Friedman, H. (1973). The consistency of classical set theory relative to a set theory with intuitionistic logic. *Journal of Symbolic Logic* **38**, 315–19.

Gandy, R. (1973). Bertrand Russell as mathematician. *Bulletin of the London Mathematical Society* **5**, 342–8.

Garciadiego, A. (1985). The emergence of some of the nonlogical paradoxes of the theory of sets, 1903–1908. *Historia Mathematica* **12**, 337–51.

Gentzen, G. (1936). Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen* **112**, 493–565; trans. by M. Szabo in Gentzen (1969).

—— (1938). Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitbeweises für die reine Zahlentheorie. *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, n.s. no. 4, 19–44. Leipzig: Hirzel; trans. by M. Szabo in Gentzen (1969).

—— (1943). Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen* **119** no.1, 140–61; trans. by M. Szabo in Gentzen (1969).

—— (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, trans. and ed. M. Szabo. Amsterdam: North Holland.

Giaquinto, M. (1994). Epistemology of visual thinking in elementary real analysis. *British Journal for the Philosophy of Science* **45**, 789–831.

—— (1999). Review of Resnik (1997). *Mind* **108**, 783–8.

Gloede, K. (1976). Reflection principles and indescribability. In *Sets and Classes: On the Work of Paul Bernays*. Amsterdam: North-Holland.

Gödel, K. (1929). *Über die Vollstandigkeit des Logikkalküls*; reprinted with a translation in Gödel (1986).

—— (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme, I. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **38**, 173–98; reprinted in Gödel (1986) and trans. in van Heijenoort (1967) and Gödel (1986).

—— (1933). Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. *Ergebnisse eines mathemati-schen Kolloquiums* **4**, 34–8; trans. in Gödel (1986).

—— (*1933*o*). The present situation in the foundations of mathematics. In Gödel (1995).

—— (1934). On undecidable propositions of formal mathematical systems (mimeographied lecture notes taken by S. Kleene and J. Rosser); reprinted with Gödel's revisions in Davis (1965) and Gödel (1986).

—— (1938*a*). The consistency of the generalized continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA* **24**, 556–7; reprinted in Gödel (1990).

—— (*1938*b*). Lecture at Zilsel's. In Gödel (1995).

—— (1940). *The Consistency of the Continuum Hypothesis*. Annals of Mathematics

*Asterisked items are from the *Nachlass*.

Studies, 3. Princeton: Princeton University Press; reprinted as 'The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory' in Gödel (1990).

—— (*1941). In what sense is intuitionistic logic constructive? In Gödel (1995).

—— (1944). Russell's mathematical logic. In P. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell*. Evanston and Chicago: Northwestern University Press; reprinted with revisions in Benacerraf and Putnam (1964).

—— (1947). What is Cantor's continuum problem? *American Mathematical Monthly* **54**, 515–25; errata **55**, 151. Gödel (1964) is revised and expanded version.

—— (1958). Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. *Dialectica* **12**, 280–7; trans. in Gödel (1990).

—— (1964). What is Cantor's continuum problem? In Benacerraf and Putnam (1964). This is a revised and expanded version of Gödel (1947); both versions are reprinted in Gödel (1990).

—— (1972*a*). On an extension of finitary mathematics which has not yet been used (revised and expanded translation of Gödel 1958). In Gödel (1990).

—— (1972*b*). Some remarks on the undecidability results. In Gödel (1990).

—— (1986). *Collected Works*, vol. I. Oxford: Oxford University Press.

—— (1990). *Collected Works*, vol. II. Oxford: Oxford University Press.

—— (1995). *Collected Works*, vol. III. Oxford: Oxford University Press.

Goldfarb, W. (1979). Logic in the twenties: the nature of the quantifier. *Journal of Symbolic Logic* **44**, 351–68.

—— (1989). Russell's reasons for ramification. In C. Savage and C. Anderson (eds.), *Rereading Russell: Essays on Bertrand Russell's Metaphysics and Epistemology*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Goldman, A. (1986). *Epistemology and Cognition*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Grattan-Guinness, I. (1978). How Bertrand Russell discovered his paradox. *Historia Mathematica* **5**, 127–37.

—— (1996). How did Bertrand Russell write *The Principles of Mathematics* (1903)? Lecture in the Philosophy of Mathematics series of the King's College Centre for Philosophical Studies, 30 October.

Grelling, K. and Nelson, L. (1908). Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti. *Abhandlungen der Frieschen Schule*, n.s. **2**.

Hahn, H. (1933). The Crisis in Intuition. In *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften*. Leipzig: Fünf Wiener Vorträge; trans. in *Hans Hahn*: *Empricism, Logic, and Mathematics. Philosophical Papers*, ed. B. McGuinness . Dordrecht: Reidel, 1980.

Hallett, M. (1984). *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Oxford: Oxford University Press.

—— (1995). Hilbert and Logic. In M. Marion and R. Cohen (eds.), *Québec Studies in Philosophy of Science I*. Dordrecht: Kluwer.

—— (1996). Introduction to the translation of Zermelo (1930). In Ewald (1996).

Hamblin, C. (1970). *Fallacies*. London: Methuen.

Hart, W. (1983). Russell and Ramsey. *Pacific Philosophical Quarterly* **64**, 193–210.

Hasenjaegar, G. (1967). On Löwenheim–Skolem type insufficiencies of second-order logic. In J. Crossley (ed.), *Sets, Models and Recursion Theory*. Amsterdam: North-Holland.

Hatcher, W. (1982). *The Logical Foundations of Mathematics*. Oxford: Pergamon Press.

Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: De Gruyter.

van Heijenoort J. (ed.) (1967). *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Hessenberg, G. (1906). Grundbegriffe der Mengenlehre. *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, n.s. **1**, 479–706.

Heyting, A. (1930). Die formalen Regeln der intuitionistichen Mathematik. In *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, physikalische-mathematische Klasse*, pp. 57–71, 158–69.

Hilbert, D. (1891). Über die stetige Abbildung einer linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen* **38**, 450–60.

—— (1900*a*). Über den Zahlbegriff. *Jahrensbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8**, 180–94; trans. in Ewald (1996).

—— (1900*b*). Mathematische probleme. *Nachrichten der Königlichen Gesellshaft der Wissenshaften zu Göttingen* 253–97; trans. in Browder (1976); excerpts trans. in Ewald (1996).

—— (1920). *Probleme der mathematischen Logik*. Transcription of lectures given in Göttingen; excerpts trans. in Ewald (1996).

—— (1922). Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **1**, 157–77; trans. in Mancosu (1998*a*).

—— (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* **95**, 161–90; trans. in van Heijenoort (1967).

—— (1928*a*). Die Grundlagen der Mathematik. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **6**, 65–85; reprinted in Hilbert (1928); trans. in van Heijenoort (1967).

—— (1928*b*). *Die Grundlagen der Mathematik, mit Zusätzen von Hermann Weyl und Paul Bernays*. Hamburger Mathematische Einzelschriften **5**, Leipzig: Teubner.

—— (1929). Probleme der Grundlegung der Mathematik. *Mathematische Annalen* **102**, 1–9; trans. in Mancosu (1998*a*).

—— (1931). Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie. *Mathematische Annalen* **104**, 485–94; trans. in Mancosu (1998).

—— and Ackermann, W. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logic*. Berlin: Springer.

—— and Bernays, P. (1934). *Grundlagen der Mathematik*, vol. I. Berlin: Springer.

—— —— (1939). *Grundlagen der Mathematik*, vol. II. Berlin: Springer.

Hintikka, J. (ed.) (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Jeroslow, R. (1973). Redundancies in the Hilbert–Bernays derivability conditions for Gödel's Second Incompleteness Theorem. *Journal of Symbolic Logic* **38**, 359–67.

Keisler, H. (1976). *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Boston, Mass.: Prindle, Weber & Schmidt.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

—— (1980). *Mathematics: The Loss of Certainty*. Oxford: Oxford University Press.

Kock, A. (1981). *Synthetic Differential Geometry*. London Mathematical Society Lecture Note Series 51. Cambridge: Cambridge University Press.

Kolmogorov, A. (1925). On the principle of the excluded middle (in Russian). *Matematicheskii sbornik* **32**, 646–67; trans. in van Heijenoort (1967).

König, J. (1965). Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. *Mathematische Annalen* **61**, 217–21; trans. in van Heijenoort (1967).

Kreisel, G. (1965). Mathematical logic. In T. Saaty (ed.), *Lectures in Modern Mathematics*, vol. 3. New York: John Wiley.

—— (1976). What have we learnt from Hilbert's Second Problem? In F. Browder (ed.), *Mathematical Developments arising from Hilbert Problems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 28. Providence, RI: American Mathematical Society.

—— (1980). Kurt Gödel, 28 April 1906—14 January 1978. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* **26**, 148–224; corrections, **27**, 697, and **28**, 718.

Kripke, S. (1975) Outline of a theory of truth. *Journal of Philosophy* **72**, 690–716; reprinted in Martin (1984).

Lakatos, I. (ed.) (1972). *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1965, vol. 1. Amsterdam: North-Holland.

Lear, J. (1977). Sets and semantics. *Journal of Philosophy* **74**, 86–102.

Lévy, A. (1960*a*). Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory. *Pacific Journal of Mathematics* **10**, 223–38.

—— (1960*b*). Principles of reflection in axiomatic set theory. *Fundamenta Mathematicae* **49**, 110.

—— (1962). On the principles of reflection in axiomatic set theory. In E. Nagel, P. Suppes, and A. Tarski (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*. Stanford: Stanford University Press.

—— (1979). *Basic Set Theory*. Berlin: Springer.

—— and Solovay, R. (1967). Measurable cardinals and the continuum hypothesis. *Israel Journal of Mathematics* **5**, 234–48.

Löb, M. (1955). Solution of a problem of Leon Henkin. *Journal of Symbolic Logic* **20**, 115–18.

Löwenheim, L. (1915). Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Mathematische Annalen* **76**; trans. in van Heijenoort (1967).

Luckhardt, H. (1973). *Extensional Gödel Functional Interpretation: A Consistency Proof of Classical Analysis*. Springer Lecture Notes in Mathematics, no. 306. Berlin: Springer.

Machover, M. and Hirschfeld, J. (1969). *Lectures on Non-standard Analysis*. Springer Lecture Notes in Mathematics, pp. 94. Berlin: Springer.

MacLane, S. and Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. New York: Springer-Verlag.

McLarty, C. (1992). *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford: Clarendon Press.

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. Oxford: Oxford University Press.

—— (ed.) (1998*a*). *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press.

—— (1998*b*). *Hermann Weyl: Predicativity and an Intuitionistic Excursion*. In Mancosu (1998*a*).

Martin, R. (ed.) (1984). *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*. Oxford: Oxford University Press.

Martin-Löf, P. (1984). *Intuitionistic Type Theory*. Naples: Bibliopolis.

Mirimanoff, D. (1917). Les Antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles. *L'Enseignement Mathématique* **19**, 37–52.

Monk, J. (1976). *Mathematical Logic*. New York: Springer Verlag.

Monna, A. (1972). The concept of function in the nineteenth and twentieth centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel, and Lebesgue. *Archive for History of Exact Sciences* **9**, 57–84.

Montague, R. and Vaught, R. (1959). Natural models of set theories. *Fundamenta Mathematicae* **47**, 219–42.

Moore, G. (1980). Beyond first-order logic: the historical interplay between mathematical logic and axiomatic set theory. *History and Philosophy of Logic* **1**, 95–137.

—— (1982). *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence*. New York: Springer-Verlag.

—— and Garciadiego, A. (1981). Burali-Forti's Paradox: a reappraisal of its origins. *Historia Mathematica* **8**, 319–50.

Mostowski, A. (1966). *Thirty Years of Foundational Studies*. Oxford: Basil Blackwell.

—— (1972). Recent results in set theory. In Lakatos (1972).

Myhill, J. (1974). The undefinability of the set of natural numbers in the ramified *Principia*. In G. Nakhnikian (ed.), *Bertrand Russell's Philosophy*. London: Duckworth.

von Neumann, J. (1923). Zur Einführung der transfiniten Zahlen. *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae: Sectio Sci-Math*. **1**, 199–208; reprinted in von Neumann (1961); trans. in van Heijenoort (1967).

—— (1925). Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für die reine und angewandte*

Mathematik **154**, 219–540; (correction in **155**, 128); reprinted in von Neumann (1961); trans. in van Heijenoort (1967).

—— (1929). Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre. *Journal für die reine unde angewandte Mathematik* **160**, 227–41.

—— (1961). *John von Neumann: Collected Works*, vol. 1. Oxford: Pergamon.

Niebergall, K., and Schirn, M. (1998). Hilbert's finitism and the notion of infinity. In M. Schirn (ed.), *The Philosophy of Mathematics Today*. Oxford: Clarendon Press.

Parsons, C. (1974). The Liar Paradox. *Journal of Philosophical Logic* **3**, 381–412; reprinted with a postscript in Martin (1984).

—— (1976) Some remarks on Frege's conception of extension. In Schirn (1976).

—— (1983). The impredicativity of induction. In *How Many Questions: Essays in Honor of S. Morgenbesser*. Indianapolis: Hackett.

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia, novo methodo exposita*. Turin: Bocca; reprinted in Peano (1957–9), vol. 2; extracts trans. by van Heijenoort as 'The principles of arithmetic, presented by a new method' in van Heijenoort (1967).

—— (1890). Sur une courbe qui remplit toute un aire plane. *Mathematische Annalen* **36**, 157–60.

—— (1895–1908). *Formulaire de mathématique*, 5 vols. Turin: Bocca.

—— (1957–9). *Opere Scelte*. Rome: Edizione Cremonese.

Pohlers, W. (1989). *Proof Theory: An Introduction*. Springer Lecture Notes in Mathematics, no. 1407. Berlin: Springer-Verlag.

Poincaré, H. (1905). Les mathématiques et la logique, I. *Revue de Métaphysique et Morale* **13**, 815–35; trans. by W. Ewald in Ewald (1996).

—— (1906). Les mathématiques et la logique, II, III. *Revue de Métaphysique et Morale*, **14**, 17–34, 294–317; trans. in Ewald (1996).

—— (1913). *Dernière Pensées*. Paris: Flammarion; trans. by J. Bolduc as *Mathematics and Science: Last Essays*. New York: Dover Press, 1963.

Potter, M. (1991). *Sets: An Introduction*. Oxford: Clarendon Press.

—— (2000). *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*. Oxford: Oxford University Press.

Powell, W. (1975). Extending Gödel's negative interpretation to ZF. *Journal of Symbolic Logic* **40**, 221–9.

Quine, W. (1951). Two dogmas of empiricism. *Philosophical Review* **60**, 20–43; reprinted in W. Quine, *From a Logical Point of View*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1980.

—— (1960). Carnap and Logical Truth. *Synthèse* **12**, 350–74; reprinted in Benaceraff and Putnam (1964).

—— (1962). The ways of paradox. In *The Ways of Paradox and Other Essays*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1976; first published as 'Paradox' in *Scientific American* **206**, no. 4, 84–96, 1962.

—— (1969). Epistemology naturalized. In *Ontological Relativity and Other Essays*. New York: Columbia University Press.

Ramsey, F. (1925). The foundations of mathematics. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2nd series, **25**(5); reprinted in Ramsey (1990).

—— (1990). *Philosophical Papers*, ed. D. Mellor. Cambridge: Cambridge University Press.

Rang, B. and Thomas, W. (1981). Zermelo's discovery of the 'Russell Paradox'. *Historia Mathematica* **8**, 15–22.

Resnik, M. (1980). *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Ithaca, NY: Cornell University Press.

—— (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Clarendon Press.

Richard, J. (1905). Les principes des mathématiques et le problème des ensembles. *Revue générale des sciences pures et appliquées* **16**, 541; trans. in van Heijenoort (1967).

Robinson, A. (1965). Formalism 64. In Y. Bar-Hillel (ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*. Proceedings of the 1964 International Congress at Jerusalem. Amsterdam: North-Holland.

—— (1966). *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland.

—— (1969). From a formalist's point of view. *Dialectica* **23**, 45–9.

Rosser, J. (1936). Extensions of some theorems of Gödel and Church. *Journal of Symbolic Logic* **1**, 87–91; reprinted in Davis (1965).

Rudin, W. (1964). *Principles of Mathematical Analysis*, 2nd edn. New York: McGraw-Hill.

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. London: George Allen & Unwin.

—— (1906). On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types. *Proceedings of the London Mathematical Society*, series 2(4); reprinted in Russell (1973).

—— (1906*b*). Les Paradoxes de la logique. *Revue de Métaphysique et Morale* **14**, 627–50; the English version, 'On "insolubilia" and their Solution by symbolic logic', is reprinted in Russell (1973).

—— (1907). The regressive method of discovering the premises of mathematics. In Russell (1973).

—— (1908). Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Mathematics* **30**; reprinted in Russell (1956*a*).

—— (1910). La Théorie des types logiques. *Revue de Métaphysique et de Morale*, **18**; Eng. lang. version, 'The theory of logical types', reprinted in Russell (1973).

—— (1911). L'Importance philosophique de la logistique. *Revue de Métaphysique et Morale* **19**, 281–91; trans. by P. Jourdain as 'The philosophical implications of mathematical logic' in *The Monist* **23**, 481–93, 1913; and in Russell (1973).

—— (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: George Allen & Unwin.

—— (1948). Whitehead and 'Principia Mathematica'. *Mind* **57**, 137–8.

—— (1952). Is mathematics purely linguistic? In Russell (1973).

—— (1956*a*). *Logic and Knowledge*, ed. R. Marsh London: George Allen & Unwin.

—— (1956*b*). Reflections on my eightieth birthday. In *Portraits from Memory*. London: George Allen & Unwin; reprinted as 'Postscript' in the paperback edn of Russell's *Autobiography*. London: Routledge, 1991.

—— (1959). *My Philosophical Development*. London: George Allen & Unwin.

—— (1967–9). *Autobiography*. London: George Allen & Unwin; paperback edn London: Routledge, 1991.

—— (1973). *Essays in Analysis*, ed. D. Lackey. London: George Allen & Unwin.

Sagan, H. (1994). *Space-Filling Curves*. New York: Springer-Verlag.

Schirn, M. (ed.) (1976). *Studies on Frege, I: Logic and Philosophy of Mathematics*. Stuttgart: Friedrich Frommann Verlag.

Schütte, K. (1977). *Proof Theory*. Berlin: Springer.

Scott, D. (1974). Axiomatising set theory. In Jech (ed.), *Axiomatic Set Theory*. Proccedings of Symposia in Pure Mathematics, **13**(2). Providence, RI: American Mathematical Society.

Shapiro, S. (1991). *Foundations with Foundationalism: A Case for Second Order Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Shepherdson, J. (1952). Inner models for set theory, II. *Journal of Symbolic Logic* **17**, 225–37.

Shoenfield, J. (1967). *Mathematical Logic*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Sieg, W. (1985). Fragments of arithmetic. *Annals of Pure and Applied Logic* **28**, 33–71.

Simpson, S. (1985). Reverse mathematics. In A. Nerode and R. Shore (eds.), *Recursion Theory*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 42. Providence, RI: American Mathematical Society.

—— (1988). Partial realizations of Hilbert's Programme. *Journal of Symbolic Logic* **53**, 349–63.

Skolem, T. (1920). Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. *Videnskapsselskapets skrifter, I: Matematisk-naturvidenskabelig klasse,* no. 4; trans. in van Heijenoort (1967).

—— (1922). Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. *Matematikerkongressen I Helsingfors den 4–7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*. Helsinki: Akademiska Bokhandeln, 1923; trans. in van Heijenoort (1967).

—— (1923). Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichen Ausdehnungsbereich. *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse,* no. 6; trans. in van Heijenoort (1967).

Smorynski, C. (1977). The incompleteness theorems. In J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland.

—— (1989). Hilbert's Programme. *Centrum voor Wiskunde en Informatica Quarterly* **1**, 3–59.

Sobocinski (1949). L'Analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski. *Methodos* **1**, 220–8.

Spector, C. (1962). Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathe-

matics. In J. Dekker (ed.), *Recursive Function Theory*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 5. Providence, RI: American Mathematical Society.

van Stigt, W. (1990). *Brouwer's Intuitionism*. Amsterdam: North-Holland.

Tait, W. (1981). Finitism. *Journal of Philosophy* **77**, 524–46.

Takeuti, G. (1987). *Proof Theory*, 2nd edn. Amsterdam: North-Holland.

Tarski, A. (1932). Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen. *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wein* **69**, 23–5; trans. by J. Woodger in Tarski (1956).

—— (1944). The semantic conception of truth. *Philosophy and Phenomenological Research* **4**, 341–76.

—— (1956). *Logic, Semantics and Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, ed. and trans. by J. Woodger. Oxford: Clarendon Press.

Tennant, N. (1987). *Anti-Realism and Logic*. Oxford: Clarendon Press.

Thomae, J. (1906). Gedankenlose Denker: Eine Ferienplauderei. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **15**, 434–38.

Troelstra, A. (1986). Introductory note to *1933e*. In Gödel (1986).

Turing, A. (1936). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*; reprinted in Davis (1965).

Visser, A. (1989). Peano's smart children: a provability logical study of systems with built-in consistency. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **30**, 161–96.

Wang, H. (1974). *From Mathematics to Philosophy*. London: Routledge & Kegan Paul.

—— (1981). Some facts about Kurt Gödel. *Journal of Symbolic Logic* **46**, 653–9.

Webb, J. (1968). Metamathematics and the philosophy of mind. *Philosophy of Science* **35**, 156–78.

Weston, T. (1977). The continuum hypothesis is independent of second-order ZF. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **18**, 499–503.

Weyl, H. (1918). *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Leipzig: Veit.

—— (1920). Über die neuen Grundlagenkrise der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift* **10**, 39–79; trans. in Mancosu (1998*a*).

—— (1925). Die heutige Erkentnisslage in der Mathematik, *Symposion* **1**, 1–23; trans. in Mancosu (1998*a*).

—— (1928). Diskusssionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **6**, 86–8; trans. in van Heijenoort (1967).

Whitehead, A. and Russell, B. (1910–13). *Principia Mathematica*, vols. I, II, and III. Cambridge: Cambridge University Press.

—— —— (1925–27). *Principia Mathematica*, vols. I, II, and III, 2nd edn. Cambridge: Cambridge University Press.

Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus*. London: Routledge & Kegan Paul.

Wright, C. (1986). *Realism, Meaning and Truth*. Oxford: Blackwell.

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I. *Mathematische Annalen* 261–81; trans. in van Heijenoort (1967).

—— (1930). Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Fundamenta Mathematicae* **16**, 29–47; trans. by M. Hallett in Ewald (1996).

日本語の文献について

本書は，ロジックその他の専門知識をほとんど仮定しないで読めるように十分な配慮がなされている。しかし，読者の予備知識の量によって，理解の仕方は随分変わってくるように思う。本書の巻末には膨大な参考文献リストが付けられているが，入門書の類いはほとんど含まれていない。日本語で読める入門書もあるので，入手しやすい最近の本をいくつか紹介しておこう。

まず，集合と論理の基礎知識が足りないと思われた方は，次の教科書をご覧いただきたい。手前味噌ではあるが，研究につながる視点で書かれたロジックの入門書は，まだめずらしいと思う。

田中一之・鈴木登志雄共著，『数学のロジックと集合論』，培風館，2003 年

ロジックの哲学について歴史的概観を得るには，次の本がコンパクトで大変読みやすい。なお，原題名は『ロジック・哲学・言語』である。

フォン・ヴリクト著／服部裕幸監修，牛尾光一訳，『論理分析哲学』，講談社学術文庫，2000 年

最近の研究のいくつかの断面を紹介したものとして，次の本も勧められる。

飯田隆編，『知の教科書：論理の哲学』，講談社選書メチエ，2005 年

さらに，ゲーデル以降のロジックの発展に関心をもっていただけたなら，下記のシリーズを併せてご覧いただけると幸甚である。

田中一之編，シリーズ『ゲーデルと 20 世紀の論理学 (ロジック)』，第 1 巻 ゲーデルの 20 世紀，第 2 巻 完全性定理とモデル理論 (以下続刊)，東京大学出版会，2006 年

監訳者あとがき

本書は，マーカス・ジャキント (Marcus Giaquito) 著 “The Search for Certainty: A Philosophical Account of Foundations of Mathematics” (オックスフォード大学出版会，2002 年) の全訳である。

著者のジャキント博士は，UCL (ユニバーシティ・カレッジ・ロンドン) の哲学科教授 (正式には Reader) であり，最近は数学における視覚認識論という新機軸に取り組んでおられる。B. バターワースの話題の書『なぜ数学が「得意な人」と「苦手な人」がいるのか』(主婦の友社，2002 年) (原題：The Mathematical Brain) のはじめに，ジャキント氏への謝辞が呈されており，その方面の彼の仕事を知らなかった私はその名を見て大変意外に思ったものだが，彼は従来の数理哲学の枠にとらわれずに積極的な研究活動を展開している。

本書の序に，ジャキント氏自身が「ロジックの学生として初めてこの分野に取り組んだときにこ (そ) のような本を切望した」と書いていることでもわかるように，学生時代は正統派のロジックを学ばれている。オックスフォード大学哲学科において，理論計算機科学の分野でも名を馳せた D. スコット教授と，現在も数理哲学者として活躍中のアイザックソン博士に師事して，1983 年に博士号を取得している。当時彼が書いたヒルベルトのプログラムについての論文は，いまでもこの分野の基本文献である。

ここ 10 年くらい，数学史関係の専門書が多数出版されているが，本書は歴史の本ではないと著者はいう。この本でも，フレーゲ，ラッセル，ラムジー，ツェルメロ，ヒルベルト，ゲーデルといった人たちの仕事がほぼ年代順に紹介されており，数学基礎論の歴史としてもそれなりに興味深く読めると思うが，歴史的な視点やその分析を重視しているわけではない。例えば，ジャキントは，ヒルベルトのプログラムが破綻しているか否かを歴史的事実との照合によって検

証するのではなく，必要な概念を厳密に規定しそれらを哲学的に分析することで普遍的な結論を導いている。つまり，これは哲学書なのである。

また，本書はロジック (数理論理学) の教科書でもないと著者はいう。しかし，技術的議論は荒削りであっても，決していい加減な脚色は加えておらず，ロジック研究の現場認識ときわめて親和性が高い議論展開がなされている。それと関連して，本書には「ゲーデルの導出不能性定理」など見慣れない用語が散りばめられ，一見とっつきにくい印象を与えるが，著者独特の言葉遣いは技術的な議論を抑えながら，正確な意味を伝えるために不可欠なものとなっている。

本書は，全体が 6 部で構成されている。

第 I 部では，19 世紀の数学，特に解析学における確実性を求める動きと，それがもたらした集合論の発展の様子が語られる。第 II 部は，フレーゲの論理主義にはじまり，クラスパラドクスの発見，その対策としてのラッセルの型理論について解説する。第 III 部は，定義可能性パラドクスの発見，循環論法原理の導入，『プリンキピア・マテマティカ』の刊行，最後にラムジーの見解を扱う。第 IV 部は，ツェルメロの集合論と，ブラウワーやワイルの批判，そしてヒルベルトのプログラムを解説する。第 V 部は，ゲーデルの導出不能性定理 (不完全性定理) について概説する。第 VI 部は，ツェルメロの累積集合モデル，そして，ヒルベルトのプログラムの現代版としての「逆数学」とフィファーマンのプログラムについて述べる。

本書の訳出の企画は，監訳者が入門書『数学のロジックと集合論』(鈴木登志雄氏との共著) をほぼ書き上げた頃に，その編集を担当された培風館の岩田誠司氏からの提案を受けてはじまった。この翻訳が大変な作業になることは想像に難くなかったので，6 人の協力者を集めて一人一部ずつ訳してもらい，全体の統一と細かなチェックを私が行うことで方針がまとまった。

諸々の事情から，各部を以下の担当者が訳すことになった。

第 I 部，第 II 部：高橋康博
第 III 部：黒田　覚
第 IV 部：坂本伸幸，根元多佳子
第 V 部：鹿島　亮
第 VI 部：山崎　武

しかし，訳出の進度と完成度に著しい差が生じたため，草稿段階から監訳者が各担当者と個別に連絡をとりあって各部独立に作業を進めた。監訳者は，すべての訳稿に対して，どこかの段階では原文と一語一語照らし合わせた詳細な点検を行っている。このような作業の結果，一通り全部の訳が出揃うまでに2年の月日が経ってしまった。そのあと出揃った訳稿を束ね，監訳者と訳者全員および培風館編集部で全体的な点検を複数回行った。

我々としてはできうる限り正確でかつ読みやすい訳を心掛けたつもりであるが，それでも思わぬ誤訳や不備を見のがしているかもしれない。それらは挙げて監訳者の私の責めに帰するものである。読者のご叱正を乞う次第である。

平成18年12月

田中 一之

索　引

人　名

数字・記号

あ 行

か　行

さ　行

た　行

な　行

は　行

ま　行

訳 者 一 覧 (五十音順)

鹿 島　亮　　[第 V 部]

1991 年　東京工業大学大学院理工学研究科 博士後期課程中途退学

現　在　東京工業大学大学院情報理工学研究科 助教授，博士 (理学)

黒 田　覚　　[第 III 部]

1997 年　名古屋大学大学院人間情報学研究科 博士後期課程修了

現　在　群馬県立女子大学文学部助教授，学術博士

坂 本 伸 幸　　[第 IV 部 前半]

2005 年　東北大学大学院理学研究科 博士後期課程修了

現　在　(株) アドバンスト・メディア勤務，博士 (理学)

高 橋 康 博　　[第 I, II 部]

2000 年　東北大学大学院理学研究科 数学専攻修士課程修了

現　在　NTT コミュニケーション科学基礎研究所 人間情報研究部
情報基礎理論研究グループ研究員，修士 (理学)

根元多佳子　　[第 IV 部 後半]

現　在　東北大学大学院理学研究科数学専攻 博士後期課程在学中

山 崎　武　　[第 VI 部]

2000 年　東北大学大学院理学研究科 博士後期課程修了

現　在　東北大学大学院理学研究科 助教授，博士 (理学)

監訳者略歴

田 中 一 之
た なか かず ゆき

1978年 東京工業大学理学部情報科学科
卒業
1980年 東京工業大学大学院理工学研究科
修士課程修了
1986年 カリフォルニア大学バークレイ校
大学院博士課程修了
現 在 東北大学大学院理学研究科教授
Ph.D.

主要著書

計算理論と論理プログラミング(共訳，丸善)
数学基礎論講義(編著，日本評論社)
逆数学と2階算術(著，河合出版)
基礎課程 線形代数学(共著，培風館)
数学の基礎をめぐる論争
(編・監訳，シュプリンガー・フェアラーク東京)
数の体系と超準モデル(著，裳華房)
数学のロジックと集合論(共著，培風館)
ゲーデルと20世紀の論理学1
ゲーデルの20世紀(編著，東京大学出版会)
ゲーデルと20世紀の論理学2
完全性定理とモデル理論
(編著，東京大学出版会)

2007年1月30日 初 版 発 行

数学の基礎についての哲学論考
確 か さ を 求 め て

原著者 M.ジャキント
監訳者 田 中 一 之
発行者 山 本 格

発 行 所 株式会社 培 風 館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102-8260
電 話(03)3262-5256(代表)・振 替 00140-7-44725

中央印刷・坂本製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN978-4-563-00370-8 C3041